



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОСКОВСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
СТРОИТЕЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

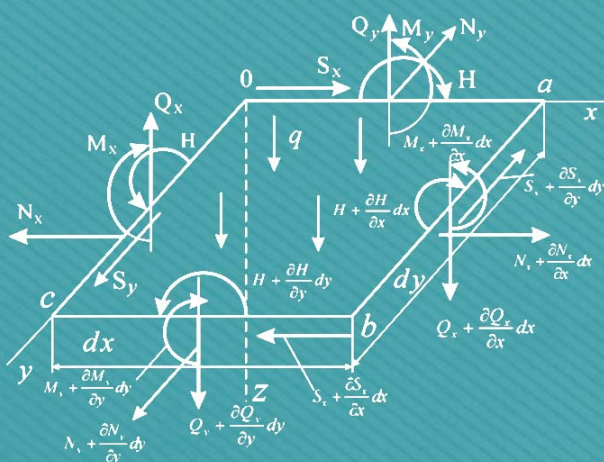
Министерство образования и науки
Российской Федерации

Институт строительства и архитектуры

Теория и практика расчета зданий, сооружений и элементов конструкций. Аналитические и численные методы

Сборник докладов и тезисов
Международной научно-практической конференции,
посвященной 90-летию со дня рождения
профессора Н.Н. Леонтьева
и 110-летию профессора В.З. Власова

(г. Москва, 21 июня 2017 г.)



© Национальный исследовательский
Московский государственный
строительный университет, 2017

ISBN 978-5-7264-1615-1

Москва
2017

УДК 624.04
ББК 38.112
Т33

*При поддержке
Федерального государственного бюджетного учреждения
«Российская академия архитектуры и строительных наук» (РААСН)*

- Т33** **Теория и практика расчета зданий, сооружений и элементов конструкций. Аналитические и численные методы** [Электронный ресурс] : сборник докладов и тезисов Международной научно-практической конференции, посвященной 90-летию со дня рождения профессора Н.Н. Леонтьева и 110-летию со дня рождения профессора В.З. Власова (г. Москва, 21 июня 2017 г.) / под общей ред. В.Л. Мондруса ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Нац. исследоват. Моск. гос. строит. ун-т. — Электрон. дан. и прогр. (10 Мб). — Москва : Изд-во Моск. гос. строит. ун-та, 2017. — Режим доступа: <http://mgsu.ru/resources/izdatelskaya-deyatelnost/izdaniya/izdaniya-otkr-dostupa/>. — Загл. с титул. экрана.
ISBN 978-5-7264-1615-1

В настоящий сборник входят доклады и тезисы участников Международной научно-практической конференции, посвященной 90-летию со дня рождения члена-корреспондента РААСН, доктора технических наук, профессора, Н.Н. Леонтьева и 110-летию со дня рождения члена-корреспондента АН СССР, доктора технических наук, профессора В.З. Власова.

Научное электронное издание

*Материалы публикуются в авторской редакции.
Авторы опубликованных докладов несут ответственность
за достоверность приведенных в них сведений.*

© Национальный исследовательский
Московский государственный
строительный университет, 2017

Ответственный за выпуск *Р.Р. Шуганов*

Кафедра строительной и теоретической механики (ИСА НИУ МГСУ)
http://mgsu.ru/universityabout/Struktura/Kafedri/Str_i_teor_meh/index.php

Тел. 8 (495) 287-49-14, доб. 3074

E-mail: confmech@gmail.com, stroitmeh@mgsu.ru

Компьютерная верстка и дизайн обложки *Р.Р. Шуганова*

Для создания электронного издания использовано:

Microsoft Word 2007, TexStudio, MikTeX 2.9, ПО Adobe Reader

Подписано к использованию 19.06.2017. Объем данных 10 Мб

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«Национальный исследовательский
Московский государственный строительный университет»
129337, Москва, Ярославское ш., 26.

Издательство МИСИ–МГСУ.

Тел. (495) 287-49-14, вн. 13-71, (499) 188-29-75, (499) 183-97-95.

E-mail: ric@mgsu.ru, rio@mgsu.ru

Уважаемые друзья, коллеги!



Ректорат Национального исследовательского Московского государственного строительного университета приветствует участников Международной научно-практической конференции «Теория и практика расчёта зданий. Аналитические и численные методы». В числе приоритетных задач конференции – рассмотрение актуальных вопросов теории статической и динамической устойчивости зданий и сооружений, анализа поведения уникальных конструкций с применением математического моделирования, проблем безопасности и надежности сооружений, возможностей современных вычислительных комплексов для решения задач расчета и проектирования.

В этом году конференция приурочена 90-летию со дня рождения члена-корреспондента РААСН, профессора, доктора технических наук Николая Николаевича Леонтьева, 110-летию со дня рождения члена-корреспондента АН СССР, профессора, доктора технических наук Василия Захаровича Власова.

Всю свою научную жизнь В. З. Власов посвятил теории тонкостенных конструкций. Исключительная заслуга В. З. Власова заключается в том, что он сформулировал приближённую теорию оболочек, которая может быть легко использована при расчётах конструкций. Благодаря удачному сочетанию методов математической теории упругости, сопротивления материалов и строительной механики ему удалось получить в теории оболочек предельно простые и чёткие результаты. Многочисленные разнообразные исследования, посвящённые проверке основных гипотез теории тонкостенных стержней и складчатых систем, теории пологих оболочек, подтвердили их правильность. Результаты, полученные В. З. Власовым, нашли применение почти во всех областях инженерного дела — и в расчёте конструкций, и в расчёте составных стержней, в расчёте крыла самолёта, созданию современных методов расчёта тонкостенных элементов вагонных конструкций и типа вагонных оболочек.

Одним из самых любимых учеников В.З. Власова являлся Н. Н. Леонтьев. В 1950-х годах В. З. Власов и Н. Н. Леонтьев совместно развивали научное направление вариационных и численных методов строительной механики, в частности, расчёта стержневых и тонкостенных пространственных систем. После внезапной кончины В.З. Власова в 1958 г. Н. Н. Леонтьев фактически возглавил и продолжил на кафедре научное направление, развившееся в трудах Василия Захаровича. Работами самого Н.Н. Леонтьева внесён существенный вклад в создание и совершенствование теории расчёта сооружений на упругом основании, теории пластин и оболочек при статических, динамических и тепловых воздействиях, а также в развитие вариационных и численных методов строительной механики.

В дальнейшем Н. Н. Леонтьев работал в области теории расчёта пластин и оболочек при различных воздействиях (статических, динамических, термических), а также в области теории расчёта сооружений на упругом основании. Н. Н. Леонтьев вёл активную преподавательскую работу, создал ряд учебников и учебных пособий. Под его руководством защищено 3 докторские и более 30 кандидатских диссертаций.

Позвольте пожелать всем участникам конференции больших творческих успехов в благородном деле развития строительной науки.

Ректор НИУ МГСУ А.А.Волков

Организационный комитет

Председатели:	Волков А.А., ректор МГСУ, чл.-кор. РААСН, проф. Теличенко В.И., президент МГСУ, действ. чл. РААСН, проф.
Заместители председателя:	Мондрус В.Л., проф. Степанов Р.Н., доц.
Члены оргкомитета:	Ганджунцев М.И., доц. Ковальчук О.А., доц. Пашков А.В., доц. Роменский Д.И., ст.преп. Чередниченко Н.Д., доц. Филатов В.В., проф.
Научный комитет:	Акимов П.А., чл.-кор. РААСН, проф. Андреев В.И., действ. чл. РААСН, проф. Ильичев В.А., действ. чл. РААСН, проф. Королев Е.В., проректор МГСУ, проф. Лейбман М.Е., проректор МГСУ Ляхович Л.С., действ. чл. РААСН, проф. Пустовгар А.П., проректор МГСУ, проф. Травуш В.И., действ. чл. РААСН, проф. Чернов Ю.Т., проф.
Ответственные секретари:	Мокин Н.А., асп. Рясный Н.А., асп. Шигапов Р.Р., асс.

Содержание

Дукарт А.В., Олейник А.И. <i>Об эффективности применения динамических гасителей в пуско-остановочных режимах колебаний защищаемых конструкций</i>	7
Мануйлов Г. А., Косицын С. Б., Бегичев М. М. <i>Классическое решение и краевой эффект в задаче устойчивости продольно сжатой цилиндрической оболочки</i>	15
Перельмутер А. В. <i>Статика и устойчивость тонкостенных стержней: исторический очерк</i>	26
Трубаев Н.А. <i>О моделировании тонких упругих оболочек методом граничного элемента</i>	40
Белаш Т.А., Альдреби З.А. <i>Оценка поврежденных сирийских архитектурных памятников, полученных в результате землетрясений и военных действий</i>	49
Белаш Т.А., Шереметьев М.Е. <i>Применение динамического гасителя колебаний для повышения сейсмостойкости существующего здания в г. Южно-Сахалинске</i>	54
Белаш Т.А., Яковлев А.Д. <i>Исследование сейсмостойкости цунамистойкого жилого здания на Курильских островах</i>	56
Бу Хо Нам <i>К расчету ортотропных пластин на статические нагрузки с использованием разностных уравнений метода последовательных аппроксимаций</i>	60
Габбасов Р.Ф., Мансур Алаа Эльдин Мохамед <i>Определение бигармонического коэффициента обобщенным методом конечных разностей</i>	63
Ильичев Е.А., Дементьев Н.М. <i>Расчет собственных колебаний коробчатых настилов многоконтурного сечения для покрытий и перекрытий с учетом пространственной работы конструкции</i>	65
Ковальчук О.А. <i>О моделировании переменной структуры несущего каркаса здания</i> .	70
Кустов А. А., Мокин Н.А., Трушин С.И. <i>Численное моделирование мембраны воздухоопорных сооружений</i>	72
Макаренко С.Ю. <i>Применение глубинных датчиков на основе тензорезисторов при исследовании деформаций ползучести тяжелого бетона</i>	74
Мондрус В.Л., Сизов Д.К. <i>Особенности численной реализации решения задачи динамики пластины с использованием языка программирования Python</i>	78
Мондрус В.Л., Шутовский С.Н. <i>Распространение колебаний в сооружениях, имеющих регулярно-периодическую структуру</i>	81
Порываев И.А., Семенов А.А. <i>Экспериментальные и численные исследования ветровых нагрузок на конические крыши вертикальных цилиндрических резервуаров</i>	84
Туснин А.Р., Бергер М.П. <i>Коэффициенты динамичности для расчёта поврежденной фермы</i>	87
Филатов В.В., Рясный Н.А. <i>Определение частоты основного тона колебаний двухслойной составной балки с ненулевой толщиной шва</i>	90

Об эффективности применения динамических гасителей в пуско-остановочных режимах колебаний защищаемых конструкций

Аннотация: Рассматриваются нестационарные колебания конструкции, оборудованной трехмассовым динамическим гасителем каскадного типа, при пуско-остановочных режимах прохождения через резонанс. Защищаемая конструкция моделируется системой с одной степенью свободы. Демпфирование во всех звеньях системы «защищаемая конструкция – гаситель» учитывается по гипотезе частотно-независимого трения Е.С. Сорокина. Для определения уравнений движения системы используется аналитический способ, основанный на разложении по формам свободных колебаний системы с демпфированием и применении специальных функций. Анализируются амплитудно-частотные характеристики колебаний защищаемой конструкции с одномассовым, двухмассовым и трехмассовым гасителями в пусковом и остановочном режимах.

Наиболее эффективным устройством виброзащиты конструкций при гармонических внешних воздействиях является виброизоляция, применение которой в эксплуатационных стационарных режимах колебаний позволяет не только значительно уменьшить максимальные перемещения защищаемой системы, но и существенно снизить динамические нагрузки, передаваемые на поддерживающие конструкции. Для виброизолированных конструкций наибольшую опасность представляют пуско-остановочные режимы колебаний при прохождении через резонанс. С целью исключения роста резонансных амплитуд виброизоляцию дополняют специальными демпферами, которые, вместе с тем, существенно ухудшают качество виброизоляции в эксплуатационном режиме колебаний конструкции. Такого недостатка лишены одномассовые [9] и многомассовые [4] динамические гасители колебаний (ДГК) пассивного типа, которые уменьшают резонансные колебания защищаемых конструкций, не ухудшая при этом характеристики виброизоляции.

Частотная узкополосность динамических гасителей в данном случае играет положительную роль, так как они включаются в работу в момент прохождения системы через резонанс и не оказывают негативного влияния в зарезонансной частотной области, по существу выключаясь из работы. Это обстоятельство позволяет рассматривать ДГК как наиболее эффективное устройство виброзащиты виброизолированных конструкций в пуско-остановочных режимах, исключая, кроме того, необходимость использования элементов автоматического регулирования. Следует отметить, что несмотря на указанные очевидные преимущества, гасители колебаний в пуско-остановочных режимах не нашли должного практического применения. Главным образом это связано с недостаточно полным исследованием эффективности ДГК в переходных режимах.

Одной из ключевых задач проектирования систем виброзащиты с использованием динамических гасителей является оптимизация их параметров для конкретной расчетной ситуации. В данном случае важное значение имеет скорость прохождения системы через резонанс. Отметим, что при больших скоростях изменения частоты воздействия амплитуды колебаний защищаемой конструкции не так велики, как при медленном прохождении системы через резонанс, но они быстро нарастают во времени, что зачастую нецелесообразно с технологической точки зрения и, кроме того, приводит к преждевременному износу виброизоляторов. При медленном прохождении системы через резонанс ее амплитуды колебаний выше, но отмеченные отрицательные динамические эффекты выражены слабее.

В большинстве случаев рекомендуется принимать оптимальные настроечные параметры гасителей, полученные для стационарных колебаний, что корректно только при медленном прохождении резонансной частоты. Заметим также, что при большой скорости прохождения системы через резонанс внешнее воздействие на защищаемую конструкцию становится подобным кратковременному импульсу; это приводит к задаче гашения колебаний конструкций, вызванных импульсивными нагрузками. Известно [6], что при таких воздействиях гасители колебаний имеют высокую эффективность. Большой интерес представляет комплексное исследование влияния на амплитуды колебаний защищаемой конструкции скорости прохождения через резонанс, рассеяния энергии в виброизолированной системе и многомассовости гасителя. Детальное рассмотрение обозначенных проблем актуально как с теоретической, так и с практической точек зрения.

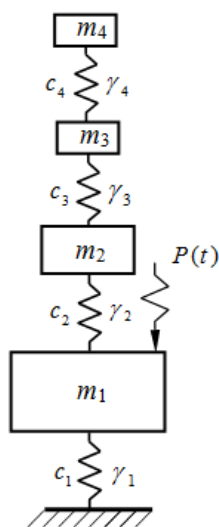


Рис. 1 – Виброизолированная конструкция, оборудованная трехмассовым ДГК каскадного типа

Задача прохождения через резонанс системы с одной степенью свободы рассматривалась различными методами [2,3,7,8,12]: с помощью моделирования на АВМ; численным решением дифференциальных уравнений; численно-аналитическими методами с использованием специальных функций и другими. Наиболее полно эта задача рассмотрена в работах [3,7,12], в которых решение выражено через интеграл вероятностей в комплексной области. Погрешность решения задачи по этой методике существенно ниже, чем при использовании численного интегрирования дифференциальных уравнений движения. Это связано с тем, что в этом случае погрешность в каждый момент времени одна и та же и связана только с точностью вычисления специальных функций [10], входящих в решение, в то время как при использовании численного интегрирования (например, методом Рунге-Кутты) погрешность зависит от числа шагов интегрирования и накапливается во времени. Данные об эффективности одномассовых ДГК при прохождении через резонанс, приведенные в монографии [9], получены методом численного интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка. С помощью такой же методики в [5] исследуется эффективность многомассовых гасителей в переходных режимах с учетом нелинейности их параметров. Полученные в этих работах результаты свидетельствуют о высокой эффективности гасителей колебаний, однако они не являются исчерпывающими и также нуждаются в дополнениях. Остановимся на возможностях применения линейных ДГК с

последовательным соединением масс (рис.1) в пусковом режиме при линейном изменении частоты. Функция внешней нагрузки может быть представлена в виде[3,12]

$$P(t) = P_0 \exp[i(\varepsilon_0 t^2/2 + \delta_0)]. \quad (1)$$

Здесь ε_0 , δ_0 , P_0 – некоторые постоянные, которые будем считать известными. Как частные случаи изображенной на рис. 1 модели могут быть исследованы колебания виброизолированной конструкции, оборудованной одномассовым, двухмассовым и трехмассовым гасителями, а также конструкции без гасителя. Демпфирование в звеньях системы учтем в соответствии с ранней гипотезой частотно-независимого трения Е.С. Сорокина [11].

Обозначим через m_j , c_j , γ_j , y_j соответственно массу, квазиупругий коэффициент, коэффициент неупругого сопротивления и абсолютную координату защищаемой конструкции ($j=1$) и звеньев гасителя ($j = 2, 3, 4$). С учетом (1) вынужденные колебания рассматриваемой системы описываются дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1(t) + \bar{c}_1 y_1(t) - \bar{c}_2 [y_2(t) - y_1(t)] &= P_0 \exp[i(\varepsilon_0 t^2/2 + \delta_0)]; \\ m_2 \ddot{y}_2(t) + \bar{c}_2 [y_2(t) - y_1(t)] - \bar{c}_3 [y_3(t) - y_2(t)] &= 0; \\ m_3 \ddot{y}_3(t) + \bar{c}_3 [y_3(t) - y_2(t)] - \bar{c}_4 [y_4(t) - y_3(t)] &= 0; \\ m_4 \ddot{y}_4(t) + \bar{c}_4 [y_4(t) - y_3(t)] &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

где $\bar{c}_j = c_j(1 + i\gamma_j)$; $j = \overline{1,4}$. В (2) точками обозначена операция дифференцирования по времени t . Вводя безразмерные параметры

$$\begin{aligned} \mu_j &= m_j/m_{j-1}; f_j = c_j/(m_j \omega_0^2); \theta = \theta/\omega_0; \tau = \omega_0 t; \\ \varepsilon &= \varepsilon_0/\omega_0^2; \bar{f}_j = f_j(1 + i\gamma_j), \end{aligned} \quad (3)$$

перепишем систему уравнений (2) в виде

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1(\tau) + (\bar{f}_1 + \mu_2 \bar{f}_2) y_1(\tau) - \mu_2 \bar{f}_2 y_2(\tau) &= y_{1,CT} \exp[i(\varepsilon \tau^2/2 + \delta_0)]; \\ \ddot{y}_2(\tau) + \bar{f}_2 [y_2(\tau) - y_1(\tau)] - \mu_3 \bar{f}_3 [y_3(\tau) - y_2(\tau)] &= 0; \\ \ddot{y}_3(\tau) + \bar{f}_3 [y_3(\tau) - y_2(\tau)] - \mu_4 \bar{f}_4 [y_4(\tau) - y_3(\tau)] &= 0; \\ \ddot{y}_4(\tau) + \bar{f}_4 [y_4(\tau) - y_3(\tau)] &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

В (3),(4) $y_{1,CT} = P_0/(m_1 \omega_0^2)$ – статическое перемещение массы m_1 ; $\omega_0 = \sqrt{c_1/m_1}$ – частота собственных колебаний виброизолированной конструкции без гасителя. В соответствии с методом главных координат [1] дифференциальное уравнение движения, соответствующее s -ой обобщенной координате системы, имеет вид:

$$\ddot{y}_s + \bar{\omega}_s^2 \bar{y}_s + \bar{h}_s \dot{y}_s = a_{s1} y_{1,CT} \exp[i(\varepsilon \tau^2/2 + \delta_0)]. \quad (5)$$

Здесь $\bar{\omega}_s = \omega_s/\omega_0$, $\bar{h}_s = h_s/\omega_0$, a_{s1} – соответственно безразмерные частоты собственных колебаний, коэффициенты демпфирования и нормированные компоненты собственных векторов, полученные из решения проблемы собственных значений, причем:

$$\sum_{i=1}^N a_{si} \cdot a_{ki} = \begin{cases} 0 & s \neq k \\ 1 & s = k \end{cases} \quad (6)$$

где N – число степеней свободы системы с гасителем. В (4), (5), в отличие от (2), точками обозначена операция дифференцирования по безразмерному параметру τ . Как показано в [12], амплитуда колебаний системы с одной степенью свободы при прохождении через резонанс в пусковом режиме определяется выражением

$$\bar{y}_S = \frac{(1+i)y_{1,CT}a_{S1}}{4\bar{\omega}_S} \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} \{W(u_S) + W(v_S) - W(u_{S_0}) \exp(u_{S_0}^2 - u_S^2) - \\ - W(v_{S_0}) \exp(v_{S_0}^2 - v_S^2)\} \exp(i\theta(t)). \quad (7)$$

Здесь

$$u_S = x_{1S} + iy_{1S}; x_{1S} = \lambda_S b_S (\xi_S - 1) + \bar{h}_S/2; y_{1S} = \bar{h}_S - x_{1S};$$

$$\xi_S = \frac{\varepsilon \tau}{\bar{\omega}_S}; \lambda_S = \frac{\bar{h}_S}{2\sqrt{\varepsilon}}; b_S = \frac{\bar{\omega}_S}{\bar{h}_S};$$

$$v_S = x_{2S} + iy_{2S}; x_{2S} = -(2\lambda_S b_S + x_{1S}); \quad (8)$$

$$y_{2S} = -(x_{2S} + \bar{h}_S); v_{S_0} = v_S |_{\xi_S=0}; u_{S_0} = u_S |_{\xi_S=0},$$

причем интеграл вероятностей комплексного аргумента определяется выражением:

$$W(z) = \exp(-z^2) \left(1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(t^2) dt \right).$$

Два последних слагаемых в (7) соответствуют свободным затухающим колебаниям системы.

В режиме остановки виброизолированной установки ($-\infty < t < 0$) согласно [3] имеем

$$\bar{y}_s(\tau) = \frac{(1+i)y_{1,CT}a_{s1}}{4\bar{\omega}_s} \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} \{W(u_s) + W(v_s) - 2 \exp(-v_s^2)\} \exp(i\phi(\tau)). \quad (9)$$

Представим функции $W(u_S)$, $W(v_S)$, $W(u_{S_0})$, $W(v_{S_0})$ в виде комбинации действительной и комплексной частей:

$$W(u_S) = u_1^S + iu_2^S; W(v_S) = v_1^S + iv_2^S; \\ W(u_{S_0}) = u_{10}^S + iu_{20}^S; W(v_{S_0}) = v_{10}^S + iv_{20}^S, \quad (10)$$

где u, v – функции, определяемые по таблицам или с помощью разложения в ряды [12]. Подставляя (10) в (7) или (9) – в зависимости от характера решаемой задачи – и группируя действительные и комплексные части, получим:

$$\bar{y}_S = \frac{(1+i)a_{S1}y_{1,CT}}{4\bar{\omega}_S} \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon} (P_1^S + iP_2^S)}, \quad (11)$$

где P_1^S, P_2^S – действительная и мнимая части выражения, полученного в результате преобразования уравнений движения (7),(9). Амплитуда колебаний главной массы m_1 определяется выражением

$$y_1 = \frac{y_{1,CT}}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} \sqrt{\left(\sum_{S=1}^3 \frac{a_{S1}^2 P_1^S}{\bar{\omega}_S}\right)^2 + \left(\sum_{S=1}^3 \frac{a_{S1}^2 P_1^S}{\bar{\omega}_S}\right)^2}. \quad (12)$$

Исследуем сначала влияние скорости прохождения через резонанс на уровень максимальных амплитуд колебаний виброизолированной конструкции без гасителя. С этой целью в выражениях (7), (9) примем $s = 1, a_{S1} = 1, \delta_0 = 0$. Кроме того, будем пренебрегать влиянием начальных условий, учитываемых слагаемыми, содержащими $W(u_{S_0}), W(v_{S_0})$.

При малых значениях параметра ε и приближении частоты воздействия к частоте собственных колебаний $\xi_S = \varepsilon \tau / \omega_{0S} \rightarrow 1$, при этом величины $x_{1S}, y_{1S}, x_{2S}, y_{2S}$ становятся малыми. Таким образом, аргументы функций $W(u_S), W(v_S)$ будут стремиться к нулю. Поэтому при $z \rightarrow 0$ интеграл вероятностей $W(z) \rightarrow 1$.

Некоторые результаты, отвечающие защищаемой конструкции без гасителя, приведены в таблице и на рис. 2, где $v = \varepsilon \tau; A_1 = \max |y_1| / y_{1,CT}$.

Таблица 1.
Максимальные амплитуды колебаний A_1 одномассовой системы без гасителя при пусковом резонансе

ε	γ_1							
	0,01	0,025	0,05	0,075	0,10	0,15	0,20	0,25
0,0005	45,72	30,22	17,79	13,18	9,89	6,64	4,99	3,99
0,001	35,47	25,76	16,40	12,73	9,65	6,57	4,96	3,98
0,002	26,93	21,12	14,53	11,63	9,17	6,42	4,90	3,95
0,004	20,03	16,98	12,35	10,39	8,44	6,16	4,76	3,88
0,006	17,03	14,47	11,02	9,53	7,89	5,87	4,63	3,81
0,008	14,65	12,87	10,07	8,88	7,45	5,66	4,52	3,77
0,010	12,28	11,72	9,38	8,36	7,09	5,47	4,41	3,67

Данные таблицы иллюстрируют совместное влияние демпфирования и скорости прохождения через резонанс на уровень максимальных амплитуд колебаний виброизолированной конструкции.

Графики $A_1(\nu)$ на рисунке 2 получены при пусковом резонансе для виброизолированной конструкции без гасителя. Кривая 1 соответствует системе без затухания и в зарезонансной области по очертанию близка к амплитудной кривой системы с одной степенью свободы при мгновенном приложении некоторой силы. Анализ кривой 2 показывает, что даже при незначительном демпфировании в связях амплитуды колебаний в зарезонансной области быстро затухают, хотя и сохраняют достаточно высокий уровень.

На рисунке 3 приведены амплитудные кривые колебаний главной массы m_1 , полученные для конструкции, оборудованной гасителями, при $\varepsilon = 0,002$. Они соответствуют пусковому резонансу. При оптимизации параметров гасителей в качестве начального приближения принимались настроечные параметры, оптимальные для гармонической нагрузки [9] с их корректировкой путем выравнивания и минимизации максимальных ординат функций $A_1(\nu)$ в окрестности резонансной частоты ($\nu = 1$). Графики на рис. 3 иллюстрируют высокую эффективность гасителей, причем при одной и той же относительной мас-

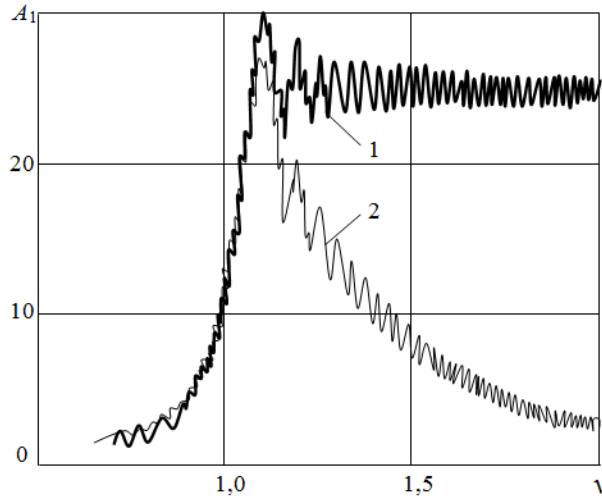


Рис. 2 – Амплитудные кривые колебаний системы без гасителя при $\varepsilon = 0,002$:
 1 – $\gamma_1 = 0,0$; 2 – $\gamma_1 = 0,01$

се звеньев максимальную эффективность обеспечивает трехмассовый гаситель колебаний (кривая 3), что доказывает положительное влияние многомассовости на эффективность виброзащиты конструкций при пуско-остановочных резонансах.

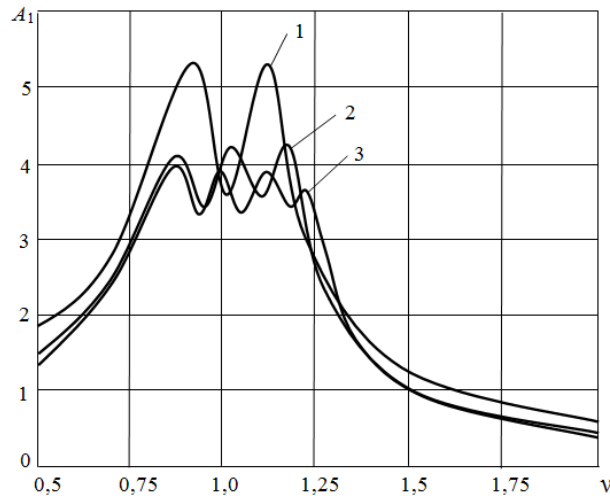


Рис. 3 – Амплитудные кривые колебаний главной массы m_1 при использовании одномассового (1), двухмассового (2) и трехмассового (3) гасителей
 $(\gamma_1 = 0,01; \varepsilon=0,002)$: 1- $\mu=0,005; f_2=0,9033; \gamma_2=0,287$; 2- $\mu_2 = \mu_3 = 0,05; f_2=0,963; f_3=0,870; \gamma_2=0,12; \gamma_3=0,305$; 3- $\mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0,05; f_2=0,98; f_3=0,97; f_4=0,884; \gamma_2=0,066; \gamma_3=0,12; \gamma_4=0,30$

Амплитудные характеристики главной массы m_1 , аналогичные приведенным на рис. 3, были получены с использованием зависимости (9) для остановочного режима колебаний при оптимальных настройках параметров гасителей, соответствующих пусковому режиму (рис. 4). Сопоставление графиков, приведенных на рисунках 3 и 4, свидетельствует о примерно одинаковой эффективности ДГК в пусковом и остановочном режимах при медленном прохождении системы через резонанс.

Графики на рис. 5 иллюстрируют эффективность ДГК при быстром прохождении через резонанс в пусковом режиме. Анализ кривых $A_1(\nu)$ показывает, что коэффициент гашения резонансных амплитуд при быстром прохождении системы через резонанс зна-

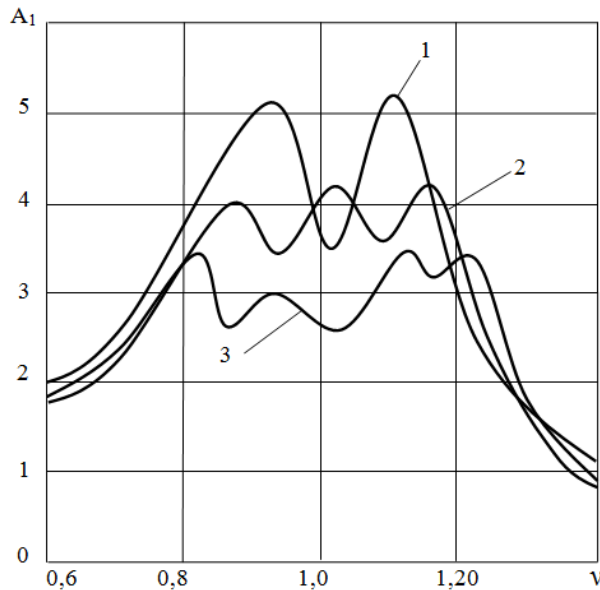


Рис. 4 – Амплитудные кривые колебаний массы m_1 при использовании одномассового (1), двухмассового (2) и трехмассового (3) гасителей в остановочном режиме при $\gamma_1=0,01$; $\varepsilon = 0,002$ (значения остальных параметров те же, что на рис. 2)

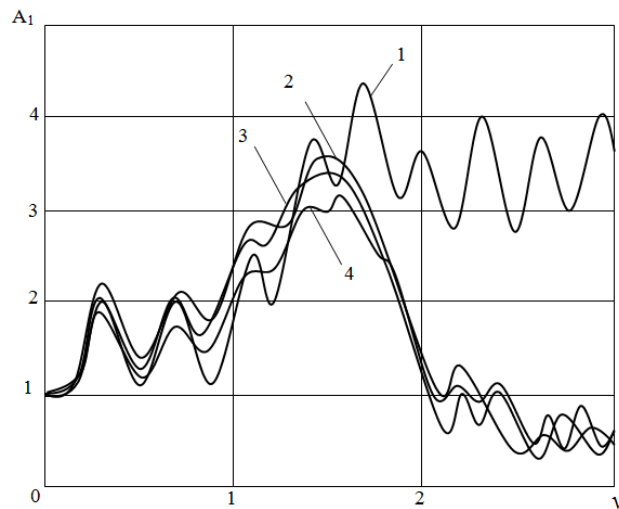


Рис. 5 – Амплитудные кривые колебаний массы m_1 в пусковом режиме при использовании одномассового, двухмассового и трехмассового гасителей с оптимальными параметрами ($\gamma_1=0,01$; $\varepsilon=0,1$):

1 – без гасителя; 2 – одномассовый гаситель: $\mu = 0,05$; $f_2=0,95$; $\gamma_2=0,287$; 3 – двухмассовый гаситель:

$m_2/m_1 = m_3/m_2 = 0,05$; $f_2=0,95$; $f_3=0,983$; $\gamma_2=0,057$; $\gamma_3=0,25$; 4 – трехмассовый гаситель:

$m_2/m_1 = m_3/m_2 = m_4/m_3 = 0,05$; $f_2=0,91$; $f_3=0,80$; $f_4=0,87$; $\gamma_2=0,03$; $\gamma_3=0,13$; $\gamma_4=0,31$

чительно меньше, чем при медленном изменении частоты воздействия ($K_\partial \geq 1,5$). Однако эффективность гасителей колебаний в зарезонансной области достаточно высока и соответствует использованию специальных демпферов с коэффициентом неупругого сопротивления не менее $\gamma_1 \cong 0,15$, что следует из сравнения амплитудных кривых, приведенных на рисунках 2-5.

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы:

1. Применение динамических гасителей в сочетании с виброизоляцией существенно уменьшает амплитуды колебаний защищаемой системы в переходных режимах, при этом

гаситель не ухудшает качество виброизоляции.

2. При медленных пуско-остановочных режимах эффективность одномассовых и многомассовых ДГК соответствует эффективности гасителей при стационарных режимах.

3. При быстром прохождении через резонанс виброизолированной системы, оборудованной ДГК, значения коэффициента гашения в резонансной области существенно ниже, чем при медленных пуско-остановочных режимах. Вместе с тем, в зарезонансной области эффективность применения ДГК высока и сопоставима с эффективностью применения специальных демпферов. Кроме того, гасители позволяют исключить появление нежелательных биений, связанных с явлениями срыва резонанса.

4. Повышение эффективности ДГК может быть достигнуто при использовании фактора многомассовости. Максимальную эффективность обеспечивают трехмассовые динамические гасители, которые требуют высокое демпфирование только в звеньях с относительно малыми (подстроечными) массами, что достаточно просто реализуемо на практике. Дополнительным фактором повышения эффективности ДГК при быстром прохождении системы через резонанс является увеличение относительной массы звеньев гасителей.

5. Полученные результаты свидетельствуют о достоинствах базирующейся на подходах классической механики методики исследования переходных режимов с использованием специальных функций, которая позволяет детально рассмотреть количественную и качественную стороны задачи и проанализировать различные частные случаи.

Список литературы

1. Бабаков И.М. Теория колебаний. – М.: Дрофа, 2004. – 502 с.
2. Ван-Дао Н. Нестационарные колебания динамической системы с гасителем // Известия АН СССР. Механика. – 1965. – №4. – С.92-96.
3. Голоскоков Е.Г., Филиппов А.П. Нестационарные колебания деформируемых систем. – Киев: Наукова думка, 1977. – 340 с.
4. Дукарт А.В., Олейник А.И. Об использовании структурного фактора многомассовости в задачах синтеза пассивных демпфирующих систем повышенной эффективности // Известия вузов. Строительство. – 2004. – №6. – С.16-21.
5. Дукарт А.В., Олейник А.И. Об эффективности некоторых типов нелинейных многомассовых динамических гасителей колебаний при прохождении через резонанс // Известия вузов. Строительство. – 2001. – №11. – С.28-36.
6. Дукарт А.В., Фам Вьет Нгок. Оптимальные параметры и эффективность динамического гасителя с частотно-независимым трением в режимах основного импульсного резонанса // Известия вузов. Строительство. – 2010. – №7. – С.89-97.
7. Коренев Б.Г. Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях. – М.: Физматгиз, 1960. – 459 с.
8. Коренев Б.Г., Пикулев Н.А., Шейнин И.С. О мерах уменьшения вибраций при прохождении через резонанс во время пуска и остановки оборудования // Колебания зданий и сооружений. – М.: Госстройиздат, 1963. – С.74-97.
9. Коренев Б. Г., Резников Л.М. Динамические гасители колебаний: Теория и технические приложения. – М.: Наука, 1988. – 304 с.
10. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации. – М.: Мир, 1980. – 608 с.
11. Сорокин Е.С. К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. – М.: Стройиздат, 1960. – 131 с.
12. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. – М.: Машиностроение, 1970. – 735 с.

Мануйлов Г.А., канд. техн. наук, доц., МИИТ, Москва, Россия
Косицын С.Б., д-р техн. наук, проф., МИИТ, Москва, Россия
Бегичев М.М., канд. техн. наук, доц., МИИТ, Москва, Россия

Классическое решение и краевой эффект в задаче устойчивости продольно-сжатой цилиндрической оболочки

Аннотация: В статье рассматриваются особенности классического решения для критических напряжений в задаче устойчивости круговой продольно сжатой цилиндрической оболочки. Это напряжение состоит из двух слагаемых, отражающих способность оболочки сопротивляться выпучиванию за счет изгибных и мембранных деформаций. Такое представление восходит еще к самым ранним работам С.П. Тимошенко. Однако при обычных закреплениях (шарнирное закрепление, заделка) классическое решение реализуется лишь при отсутствии стеснения пуассонового расширения оболочки (коэффициент Пуассона равен нулю). При ненулевом коэффициенте Пуассона развивается осесимметричный краевой эффект, который уменьшает критическую нагрузку и вызывает смену начального расположения собственных форм (конкуренции) по мере роста нагрузки. Установлено, что в условиях краевого эффекта оболочка всегда теряет устойчивость по только по неосесимметричным формам.

Известно, что решение линейно задачи устойчивости продольно сжатой круговой цилиндрической оболочки без начальных несовершенств в упругой стадии дает классическую величину критических напряжений

$$\sigma_{\text{кр.кл.}} = E\delta/R\sqrt{3(1-\nu^2)} \quad (1)$$

В обычных обозначениях. Выпучивание оболочки происходит либо по осесимметричной форме, либо по форме, являющейся линейной комбинацией осесимметричной ($n = 0$) и кососимметричной ($n = 1$) форм. Здесь n – число полных поперечных волн в критическом равновесии.

Формула (1) была получена Р. Лоренцом (1908 г., неосесимметричное выпучивание [1]) и С.П. Тимошенко (1910 г., симметричное выпучивание [2]). Однако в последующие годы было установлено, что если материал оболочки имеет ненулевой коэффициент Пуассона ($\nu \neq 0$), то во многих случаях граничных условий классическая критическая нагрузка не достигается даже в расчетах. Причиной является развитие нелинейного осесимметричного краевого эффекта, вызванного стеснением опорными закреплениями (шарнирное закрепление, заделка) свободного пуассонового расширения. В книге [3] Я.Г. Пановко писал, что осесимметричный краевой эффект делает линейную задачу на собственные значения неоднородной, и что для решения задачи устойчивости необходимо выполнить геометрически нелинейный деформационный расчет. Это замечание верно по отношению к осесимметричным формам выпучивания. Но по отношению к неосесимметричным формам потери устойчивости (формам «волнообразования») задача на собственные значения остается однородной. Эти формы потери устойчивости продольно сжатой цилиндрической оболочки являются неустойчивыми (водораздельными), так как они отделяют устойчивое докритическое равновесие от другого устойчивого, но сильно деформированного далекого равновесия, означающего, по существу, разрушение оболочки [4].

Другой важный момент – резкое снижение критической нагрузки при определенных граничных закреплениях (например, при условии свободного края и некоторых других).

В общем случае это связано с тем, что полное сопротивление оболочки выпучиванию создается за счет энергии изгибных и энергии окружных мембранных деформаций.

В данной работе рассмотрено упомянутое разложение выражения критической нагрузки на два слагаемых, проанализировано решение и результаты исследования влияния краевого эффекта Алмросом [5], показано что влияние краевого эффекта приводит к

исчезновению осесимметричной формы потери устойчивости. Изучены также некоторые особенности развития краевого эффекта и его роль в формировании волнообразования в момент потери устойчивости. Рассмотрены также некоторые варианты краевых закреплений оболочки, при которых критическая нагрузка уменьшается в два раза по сравнению с классической.

1. О классической критической нагрузке

Бифуркационная задача устойчивости продольно сжатой круговой цилиндрической оболочки, как известно [6], описывается линейным дифференциальным уравнением в частных производных относительно прогиба $W(x,y)$ при нулевых граничных условиях

$$\frac{D}{\delta} \nabla \nabla \nabla \nabla W + \frac{E}{R^2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^4} + \sigma \nabla \nabla \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) = 0$$

Для случая шарнирного закрепления

$$W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \sigma_x = V = 0 \text{ при } x = 0, l.$$

Здесь V – поперечное перемещение, ∇ – оператор Лапласа, D – цилиндрическая жесткость, σ – продольное сжимающее напряжение.

В качестве решения (неосесимметричная форма потери устойчивости) можно принять

$$W = A_{\min} \sin \frac{\pi m x}{l} \sin \frac{n y}{R}$$

Здесь n и m – целые числа, определяющие число поперечных волн и продольных полуволн. Подстановка выражения для прогиба в виде произведения синусоид позволяет выразить критическое напряжение в следующем виде:

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{E\delta}{R} \left[\frac{\delta l^2 R}{12(1-\nu^2)\pi^2 m^2} \left(\frac{\pi^2 m^2}{l^2} + \frac{n^2}{R^2} \right) + \frac{\pi^2 m^2}{\delta l^2 R \left(\frac{\pi^2 m^2}{l^2} + \frac{n^2}{R^2} \right)^2} \right]$$

Если ввести безразмерные величины

$$\eta = n^2 \delta / R; \quad \xi = b/a = \pi R m / n l,$$

где a и b – размеры прямоугольных ячеек волнообразования вдоль образующей и направляющей цилиндра, и обозначить

$$\frac{\pi^2 m^2 R^4}{\delta l^2 R n^4} = \frac{\pi^2 m^2 R^2}{l^2 n^2} \cdot \frac{R}{\delta n^2} = \xi^2 / \eta,$$

то можно записать

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{E\delta}{R} \bar{\sigma}_{\text{кр}} = \frac{E\delta}{R} \left[\frac{(1+\xi^2)\eta^2}{12(1-\nu^2)\xi^2} + \frac{\xi^2}{(1+\xi)^2\eta} \right]$$

или

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{E\delta}{R} [\bar{\sigma}_{\text{и}} + \bar{\sigma}_{\text{м}}] = \frac{E\delta}{R} \bar{\sigma}_{\text{кр}} \quad (2)$$

Здесь первое слагаемое в скобках определяет вклад энергии изгибных деформаций оболочки в общее сопротивление выпучиванию; второе слагаемое – вклад энергии поперечных

мембранных деформаций. Выражение в квадратных скобках состоит из двух фактически взаимобратных величин. Поэтому наименьшая величина критического напряжения достигается при взаимном равенстве этих слагаемых. Тогда каждое из них равно половине минимальной критической нагрузки.

$$\sigma_{\text{кр}}^{\min} \rightarrow \sigma_{\text{кр}}^{\text{н}} = \sigma_{\text{кр}}^{\text{м}} = \frac{1}{2} \sigma_{\text{кр}}^{\min}$$

Для определения $\sigma_{\text{кр}}^{\min}$ удобно ввести обозначение

$$\Psi = (1 + \xi^2)^2 \eta / \xi^2$$

Тогда в соответствии со сказанным

$$\bar{\sigma}_{\text{кр}}^{\min} = \left[\frac{\Psi}{12(1 - \nu^2)} + \frac{1}{\Psi} \right] \rightarrow \Psi^2 = 12(1 - \nu^2); \Psi = 2\sqrt{3(1 - \nu^2)}$$

Окончательно получим выражение для классического критического напряжения

$$\sigma_{\text{кр}}^{\min} = \frac{E\delta}{R} \left(\frac{1}{2\sqrt{3(1 - \nu^2)}} + \frac{1}{2\sqrt{3(1 - \nu^2)}} \right) = \frac{E\delta}{R\sqrt{3(1 - \nu^2)}}$$

Количество окружных волн n зависит от соотношения сторон прямоугольных ячеек волнообразования $\xi = a/b$

$$n = \frac{\xi}{1 + \xi^2} \sqrt[4]{\frac{R^2}{\delta^2} 12(1 - \nu^2)}$$

При $\xi = 1$ (квадратные ячейки) приходим к известной формуле $n \cong 0,909 \sqrt{\frac{R}{\delta}}$

Энергетическое обоснование формулы (2) покажем при выводе критического усилия ($P = \sigma_{\text{кр}}\delta$), как это сделал С.П. Тимошенко [7]. Он принял в качестве осесимметричной формы потери устойчивости синусоидальную форму прогибов ($w = A \sin \frac{\pi mx}{R}$).

Условие наступления критического равновесия можно представить в виде равенства нулю второй вариации полной потенциальной энергии

$$\delta^2 \Theta = I_{\sigma} + I_{\text{н}} + I_{\text{м}} = 0 \quad (3)$$

где I_{σ} – работа внешней нагрузки, $I_{\text{н}}$ и $I_{\text{м}}$ – потенциальная энергия изгибных и мембранных деформаций

$$I_{\sigma} = -2\pi RP \int_0^l \frac{1}{2} \left(\frac{dW}{dx} \right)^2 dx = -PA^2 \pi^3 m^2 R / 2l$$

$$I_{\text{н}} = 2\pi RD \int_0^l \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 W}{dx^2} \right)^2 dx = A^2 D \pi^4 m^4 R / 2l^3$$

$$I_{\text{м}} = \frac{2\pi RE\delta}{2(1 - \nu^2)} \int_0^l \left[\left(\frac{du}{dx} - \frac{w}{R} \right)^2 + 2(1 - \nu) \frac{wdu}{Rdx} \right] dx = A^2 \pi E \delta l / R$$

Критическое усилие получим в виде двух составляющих в соответствии с представлением энергии упругой деформации как суммы энергии изгибной деформации и энергии мембранной деформации.

$$P_{\text{кр}} = \frac{E\delta^3 2m^2 \pi^2}{24|(1-\nu^2)l^2} + \frac{E\delta l^2}{\pi^2 m^2 R^2} = \frac{E\delta^2}{R} \bar{P}_{\text{кр}}$$

или

$$P_{\text{кр}} = \frac{E\delta^2}{R} \left(\frac{\delta R \pi^2 m^2}{12(1-\nu^2)l^2} + \frac{l^2}{\delta R \pi^2 m^2} \right) = \frac{E\delta^2}{R} (\bar{P}_{\text{и}} + \bar{P}_{\text{м}})$$

Как и в рассмотренном выше выводе формулы классического критического напряжения соответствует равенству слагаемых в скобках

$$\min P_{\text{кр}} \Rightarrow \bar{P}_{\text{и}} = \bar{P}_{\text{м}} = \frac{1}{2} \bar{P}_{\text{кр.кл.}}$$

Если обозначить

$$1/\psi = \delta R \pi^2 m^2 / l^2; 1/\psi = \bar{P}_{\text{м}},$$

то

$$\bar{P}_{\text{м}} = \bar{P}_{\text{и}} = \frac{1}{2\sqrt{3(1-\nu^2)}} = \frac{1}{2} \bar{P}_{\text{кр.кл.}}$$

Окончательно получим

$$P_{\text{кр}} = \frac{E\delta^2}{R} \left(\frac{1}{2\sqrt{3(1-\nu^2)}} + \frac{1}{2\sqrt{3(1-\nu^2)}} \right) = \frac{E\delta^2}{R\sqrt{3(1-\nu^2)}}$$

Количество продольных полуволн m определяется так:

$$m = \sqrt{2\sqrt{3(1-\nu^2)}l/\pi\sqrt{R\delta}}$$

Заметим, что разложение критического усилия на изгибную и равную ей мембранную составляющие справедливо, вообще говоря, только для рассмотренного выше классического решения линеаризованной задачи устойчивости. В случае развития краевого эффекта соотношение между $\bar{P}_{\text{и}}$ и $\bar{P}_{\text{м}}$ может измениться. В то же время при определенных граничных условиях может оказаться, что $\bar{P}_{\text{м}}$ значительно меньше $\bar{P}_{\text{и}}$, и тогда критическое усилие $\bar{P}_{\text{кр}}$ будет намного ниже классического значения.

2. О влиянии краевого эффекта

Исследованиями влияния краевого эффекта при продольном сжатии цилиндрической оболочки занимались Геккелер [8], Фишер [9], Ш. Охира[10], Б. Алмрос[5], Н. Хофф и Л. Райфельд [11]. Особенно важными представляются результаты, полученные Б. Алмросом. Он представил общее решение для прогиба W и функции напряжений f в момент потери устойчивости в виде двух слагаемых

$$W = W_0 + W_1; f = f_0 + f_1$$

Первые слагаемые есть решения дифференциального уравнения краевого эффекта (подробности см [5])

$$Dw_0xxxx + Pw_0xx + E\delta w_0/R^2 - \frac{\nu P}{R} = 0$$

Вторые слагаемые есть нулевые собственные формы ($W_1 = \xi W_{c\phi}^0$), которые находятся путем численного решения однородных уравнений равновесия и совместности деформаций, после подстановки в них решений для краевого эффекта W_0 и f_0

$$D\nabla^4 W_1 + f_{1,xx/R} + PW_{1,xx} - W_{0,xx}f_{1,yy} + \left(vP - \frac{E\delta W_0}{R} \right) W_{1,yy} = 0$$

$$\frac{1}{E\delta} \nabla^4 f_1 - W_{1,xx/R} + W_{0,xx}W_{1,yy} = 0$$

Здесь нижние индексы xx и yy после запятой означают дифференцирование по соответствующей координате. При помощи представлений

$$f_1 = F(x) \sin \frac{ny}{R}; W_1 = W(x) \sin \frac{ny}{R}$$

Б. Алмрос перешел к системе обыкновенных уравнений с переменными коэффициентами относительно $F(x)$ и $W(x)$

$$D \left[W'''' - 2\left(\frac{n}{R}\right)^2 W'' + \left(\frac{n}{R}\right)^4 W \right] + \frac{F}{R} + PW'' + \left(\frac{n}{R}\right)^2 W_0'' F - \left(\frac{n}{R}\right)^2 \left(\nu P - \frac{E\delta W_0}{R} \right) W = 0$$

$$\frac{1}{E\delta} \left[F'''' - 2\left(\frac{n}{R}\right)^2 F'' + \left(\frac{n}{R}\right)^4 F \right] - \frac{W''}{R} - \left(\frac{n}{R}\right)^2 W_0'' W = 0$$

Граничные условия выражались через W и F обычным путем в случае, когда в них входят W, f, P, N_{xy} . Условия относительно перемещений записывались так:

$$U = 0 \rightarrow F'' + vF\left(\frac{n}{R}\right)^2 = 0$$

$$V = 0 \rightarrow F''' - (2+v)F\left(\frac{n}{R}\right)^2 - E\delta W' = 0$$

Классическое решение получается если принять, что

$$W_0 = vPR/E\delta$$

Решение уравнений и определение критической нагрузки выполнялось численно методом конечных разностей.

Однородная задача определения бифуркационной нагрузки, соответствующей неосесимметричной форме потери устойчивости, решалась из условия равенства нулю определителя соответствующей матрицы.

Исследования сходимости МКР показали, что для получения двух верных знаков критической нагрузки достаточно иметь 50-100 точек дискретизации. Уточнение критической нагрузки (3-4 верных знака) требовало существенного измельчения сетки КР (до 400-600 точек) и, соответственно, увеличения трудоемкости счета.

Отметим, что в задачах с шарнирным закреплением наблюдалась сходимость снизу, тогда как в случае заделанных краев оболочки сходимость приближенных значений критической нагрузки была снизу.

Результаты этого исследования относительно $\eta = \frac{\sigma_{кр}^{кр\phi}}{\sigma_{кр.кл.}}$ при восьми различных сочетаниях граничных условий даны в таблице [5]. Заметим, что Б. Алмрос охватил далеко не все сочетания отношений R/δ и L/R .

Как следует из результатов в этой таблице, влияние этих параметров оболочки на критическую нагрузку значительно меньше влияния граничных условий. Так для стандартных условий шарнирного опирания

$$S_1 (W|_{\Gamma} = W''|_{\Gamma} = N_x|_{\Gamma} = V|_{\Gamma} = 0) \text{ при } 4R > \frac{1}{2}$$

$$\eta = \sigma_{\text{кр}}^{\text{кр}\phi} / \sigma_{\text{кр.кл.}} \approx 0,8 - 0,87$$

При граничном условии $S_2 (w|_{\Gamma} = w''|_{\Gamma} = u|_{\Gamma} = V|_{\Gamma} = 0) \eta \cong 0,84$.

Для $S_3 (w|_{\Gamma} = w''|_{\Gamma} = N_x|_{\Gamma} = N_{xy}|_{\Gamma} = 0)$ значение η существенно меньше ($\eta \approx 0,5 \div 0,51$) Практически те же значения $\eta (\eta \cong 0,5 \div 0,51)$ были получены и для случая

$$S_4 (w|_{\Gamma} = w''|_{\Gamma} = N_x|_{\Gamma} = N_{xy}|_{\Gamma} = 0)$$

Отметим, что в случае S_3 и S_4 снижение критической нагрузки такое же, как и без учета краевого эффекта. Эти два последних результата (S_3 и S_4) указывают на важную сдерживающую роль краевых окружных мембранных напряжений. При отсутствии этих напряжений критическая нагрузка практически уменьшается в два раза по сравнению с классической.

В случае стандартной заделки (условие $C_3 (w|_{\Gamma} = W'_{\Gamma} = N_x|_{\Gamma} = N_{xy} = 0)$, как и в случае условия $C_1 (w|_{\Gamma} = W'_{\Gamma} = u|_{\Gamma} = V|_{\Gamma} = 0)$ снижение нагрузки несколько меньше $\eta = 0,91 \div 0,93$. Немного меньше величина η для случая $C_2 (C_2 (W|_{\Gamma} = W'_{\Gamma} = N_x|_{\Gamma} = v|_{\Gamma} = 0))$. Здесь $\eta \approx 0,86 \div 0,91$. Примерно такие же значения η и для сочетания $C_4 (C_4 (W|_{\Gamma} = W'_{\Gamma} = N_x|_{\Gamma} = N_{xy}|_{\Gamma} = 0)) - \eta = 0,86 \div 0,91$.

Было установлено, что форма неосесимметричной потери устойчивости имеет 8-9 окружных волн по всех случаях кроме S_3 и S_4 , для которых число окружных волн уменьшалось до двух ($n_{\text{кр}} = 2$).

Конечно-мерные расчеты авторов (NASTRAN, MARC) показали критическое давление $P_{\text{кр}} = 713$ кН для шарнирно закрепленной оболочки Дж. Кролла [12] ($R/\delta = 300, R = 300$ мм, $L/R = 2,88; E = 2,1 \cdot 10^4$ кг/мм², $\nu = 0,3$). Для близкой по размерам оболочки ($R/\delta = 100, L/R = 3,2$) с таким же закреплением Алмрос получил $P \sim 693$ кН. Классическая критическая нагрузка для этой оболочки:

$$P_{\text{кр.кл.}} = 1,21\pi E\delta^2 = 798,28 \text{ кН.}$$

Результат Алмроса $\eta = 0,868$. Наш результат несколько больше ($\eta = 0,893$). При этом количество поперечных волн $n = 15$, а не 9 как у Алмроса, что объясняется существенно большей величиной $R/\delta = 250 > 100$. Отметим, что развитие нелинейного осесимметричного краевого эффекта за счет стеснения поперечного пуассонового расширения оболочки приводит к конкуренции собственных форм по мере увеличения сжимающей нагрузки. Это значит, что кривые изменения соответствующих собственных значений по нагрузке производной нелинейного оператора пересекаются между собой. Тем самым меняется взаимное расположение собственных форм потери устойчивости (рисунок 1).

Наши расчеты для ряда шарнирно закрепленных и заземленных оболочек показали, что осесимметричная и кососимметричная формы потери устойчивости остаются первыми вплоть до нагрузки, равной $(0,65-0,7) P_{\text{кр.кл.}}$. Однако далее эти формы «уступают» первое место (соответствующее наименьшей жесткости оболочки) кососимметричным формам.

Эта смена форм потери устойчивости происходит с одновременным более интенсивным развитием краевого эффекта (по мере приближения сжимающей нагрузки к критическому

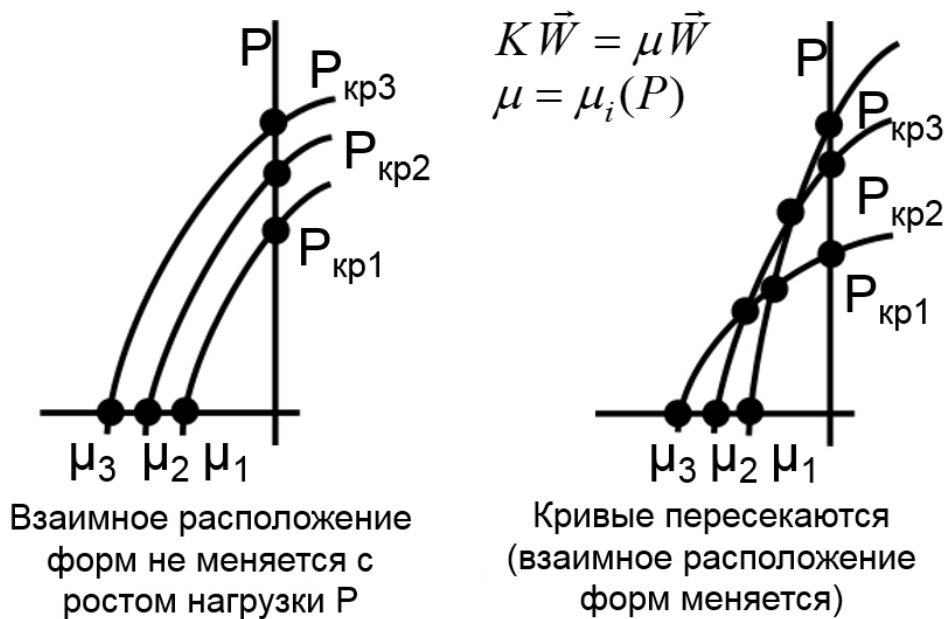


Рис. 1 – Конкуренция собственных форм

значению). Когда же нагрузка достигает предкритического значения осесимметричной и кососимметричной форм потери устойчивости нет среди первых десяти собственных форм потери устойчивости оболочки (рисунок 2). В этот момент первые две «нулевые» собственные формы W_1^0 и W_2^0 – одинаковые.

Это циклически симметричные двукратные формы волнообразования, повернутые относительно друг друга на 6° . Поэтому начальная форма потери устойчивости образуется как линейная комбинация этих форм, которая суммируется с осесимметричным предкритическим равновесием.

$$\vec{W}_{\text{нач.п./кр}} = \vec{W}_{\text{предкр}} + \xi_1 \vec{W}_1^0 + \xi_2 \vec{W}_2^0$$

Когда же фактически может быть реализовано классическое решение? Ответ простой – когда не будет развиваться краевой эффект (имеются в виду стандартные условия шарнирного закрепления и заделки). Но при таких закреплениях избежать стеснения поперечного расширения можно, если коэффициент Пуассона равен нулю ($\nu = 0$). В этом случае справедливо рассмотренное выше линеаризованное классическое решение задачи устойчивости

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{E\delta}{\sqrt{3} R}$$

При этом первая собственная форма потери устойчивости – осесимметричная. Но она может быть кратной.

На рисунке 3 показаны собственные формы потери устойчивости для оболочки Дж. Кролла при нулевой нагрузке (а) и для предкритического равновесия (б, $P = 760$ кН, $P_{\text{кр.кл}} = 761,8$ кН).

Здесь видно, что начальный порядок расположения первых 5-и форм сохраняется вплоть до критического равновесия. Следовательно, среди этих собственных форм нет конкуренции при отсутствии краевого эффекта. В настоящей работе установлено, что даже очень малый ненулевой коэффициент Пуассона ($\nu = 0,05$) вызывает развитие краевого эффекта.

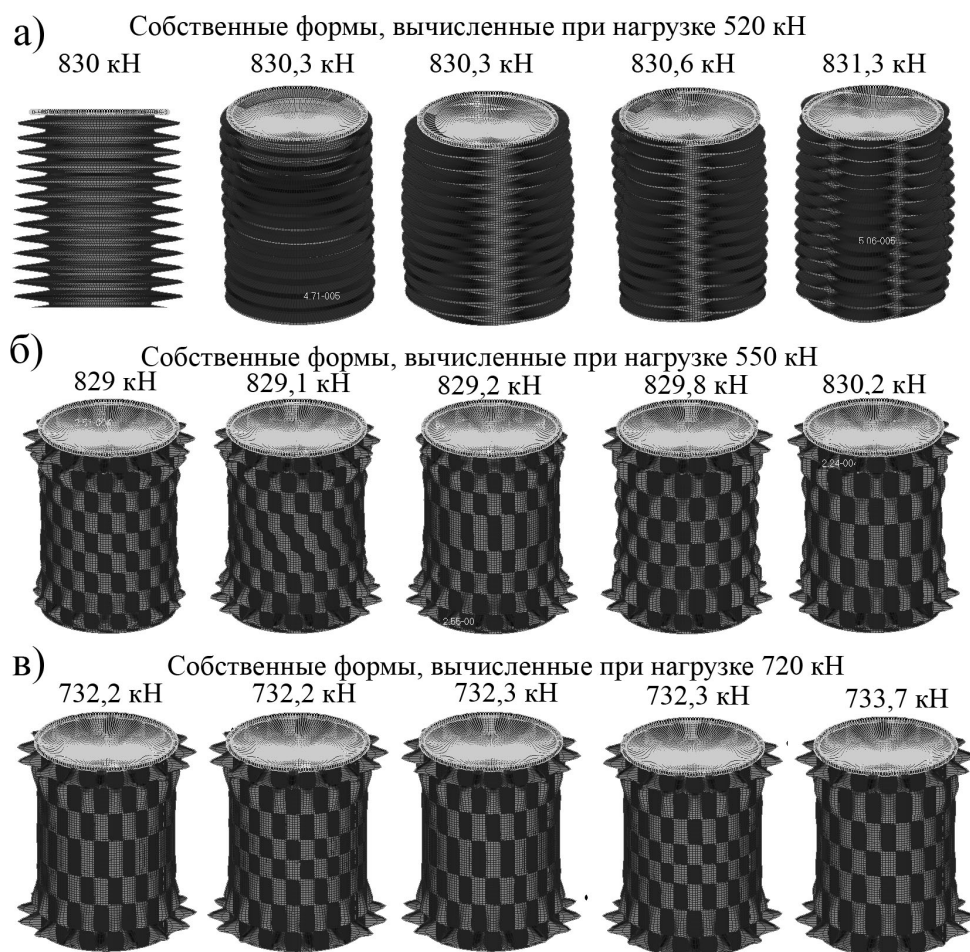


Рис. 2 – Собственные формы потери устойчивости, вычисленные при нагрузках 520, 550 и 720 кН (при $\nu = 0,3$)

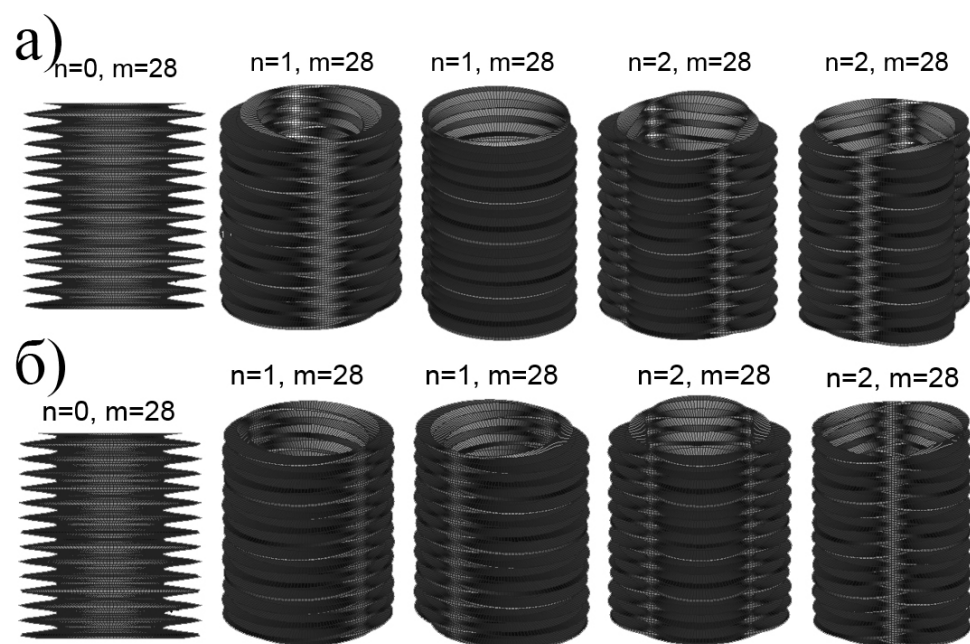


Рис. 3 – Собственные формы потери устойчивости оболочки с нулевым коэффициентом Пуассона

Отметим, что благодаря краевому эффекту в приопорной зоне шарнирно закрепленной оболочки создается мощный пояс больших растягивающих окружных мембранных напряжений. Такой пояс (как обруч) существенно повышает запас устойчивости продольно сжатой оболочки (рисунок 4). Одновременной с этим поясом рядом образуется пояс значительных сжимающих окружных мембранных напряжений. Здесь оболочка испытывает двухосное сжатие – это наиболее провокационная зона с точки зрения начала волнообразования. Действительно, при переходе в начальное послекритическое равновесие именно вдоль зоны этого пояса сжатия развиваются первые «элементы волнообразования» (рисунок 4), которое затем распространяется на всю поверхность оболочки.

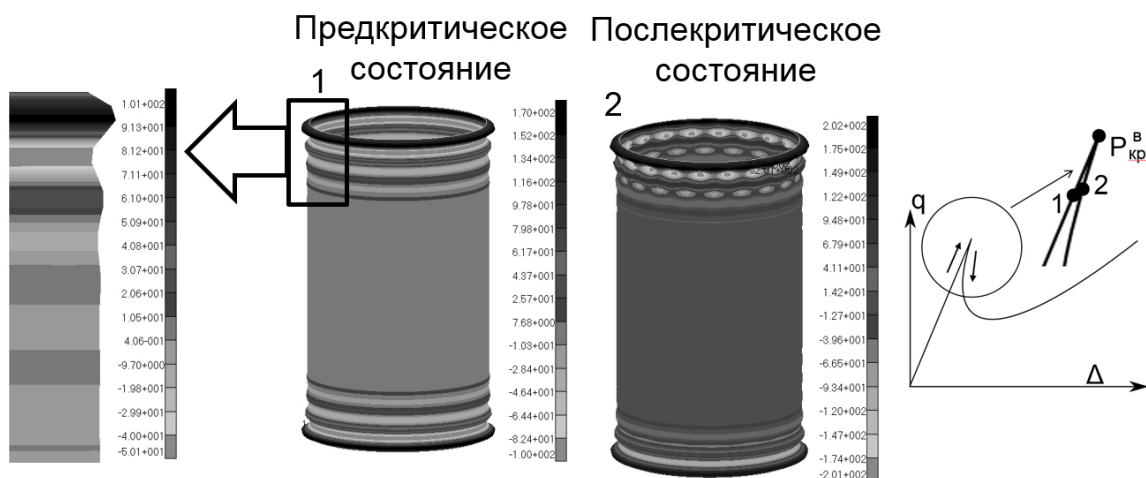


Рис. 4 – Распределение напряжений в окружном направлении в предкритическом и послекритическом равновесии

3. Об устойчивости оболочки с почти свободным краем.

Другой случай отсутствия краевого эффекта – задаче устойчивости сжатой оболочки со свободным (или почти свободным) краем, когда отсутствуют краевые радиальные опоры. В 1942 г. Н.А. Кильчевский [13] решил рассматривать задачу устойчивости при граничных условиях свободного края ($W_{xx} = (DW_{xxx} + \sigma\delta W_x) = 0$). Предполагалась осесимметричная форма потери устойчивости. Критическая нагрузка оказалась близкой к половине классической. По-видимому, это объясняется отсутствием вклада энергии мембранных поперечных деформаций. Как отмечалось ранее, подобная ситуация наблюдалась и в результатах Алмроса [5] (граничные условия S_3 и S_4). В этих случаях оболочка сопротивляется выпучиванию практически только за счет энергии изгибных деформаций. В данной работе исследовалась устойчивость сжатой оболочки ($R/\delta = 250, R = 250$ мм, $L/R = 4, E = 10^4$ кг/мм², $\nu = 0,3$) с почти свободными краями. Для обеспечения геометрической неизменяемости КЭ модели, на верхнем и нижнем краях было поставлено по четыре касательных опоры (рисунок 5). Такое закрепление допускало свободное радиальное пуассоново расширение оболочки, обеспечивающее сохранение круговой формы поперечного сечения (рисунок 5). Линеаризованный расчет дал критическую нагрузку $P_{кр}^в = 143,6$ кН. Геометрически нелинейный расчет показал, что $P_{кр}^в = 160$ кН. Последнее число составляет $\sim 0,42P_{кр.кл.}$, равное 380 кН. Форма потери устойчивости как в линеаризованном, так и в нелинейном расчетах весьма похожи друг на друга. Наиболее сильные прогибы развиваются на верхнем крае оболочки. Образующие слабо искривлены и наклонены к вертикали, что указывает на характер деформации близкий к геометрическому

изгибанию. Здесь также невелика роль поперечных мембранных напряжений в сопротивлении оболочки выпучиванию.

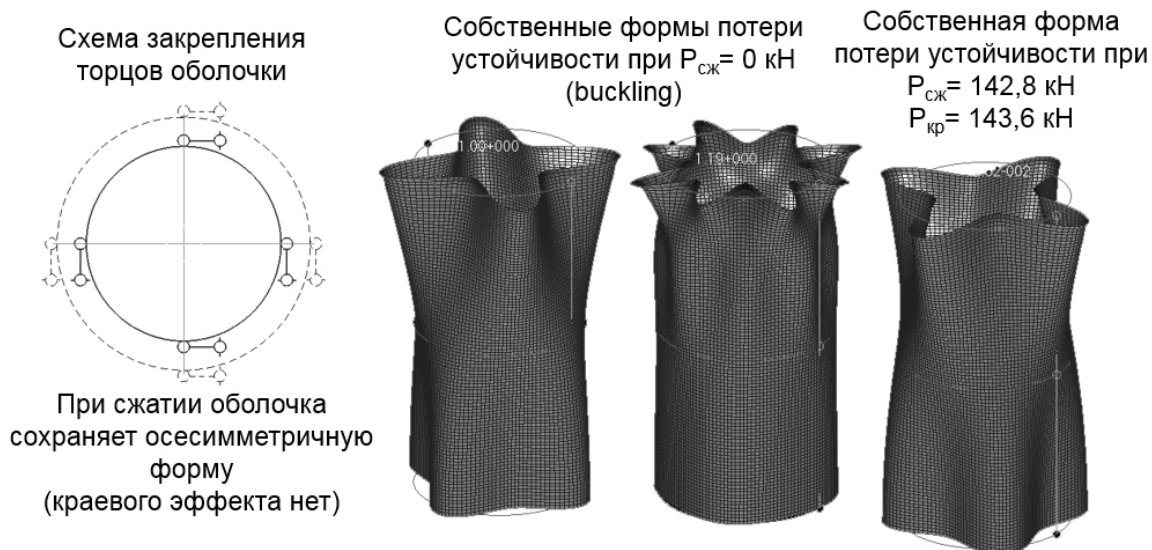


Рис. 5 – Собственные формы потери устойчивости оболочки с касательным закреплением краев

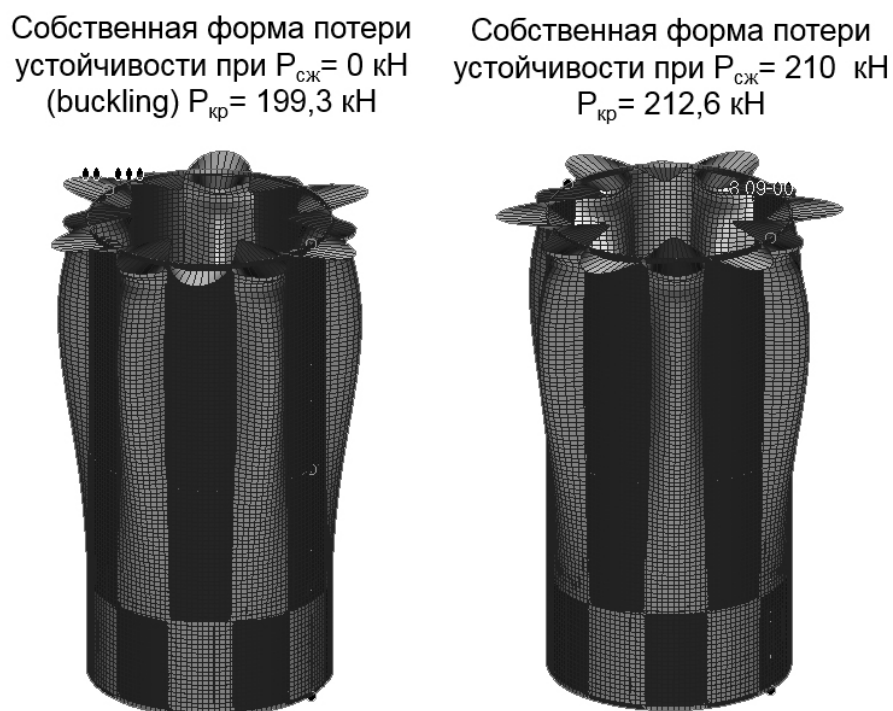


Рис. 6 – Собственные формы потери устойчивости цилиндрической оболочки при касательном закреплении краев

Были выполнены расчеты этой же оболочки при постановке касательных опор по всем 140 узлах КЭ сетки вдоль каждого края оболочки. Наложение дополнительных связей должно, согласно теореме Релея увеличить критическую нагрузку. Действительно, линейный расчет на собственные значения (при нулевом сжатии) показал, что $P_{кр} = 199,3$ кН ($\eta = 0,524$); для геометрически нелинейного расчета критическая нагрузка была близка к

этому значению и составила ~ 206 кН ($\eta = 0,54$). Формы потери устойчивости оказались практически одинаковыми ($n = 6, m = 3$, рисунок 6).

Наиболее интенсивное волнообразование наблюдалось вблизи верхнего свободного края оболочки. Ниже этой зоны своеобразного «краевого эффекта» искривление образующих было достаточно слабым. Почти половинное значение критической нагрузки и слабо искривленная форма потери устойчивости оболочки позволяют предположить, что и в этом случае поперечные мембранные деформации почти не участвуют в сопротивлении оболочки выпучиванию.

Список литературы

1. Lorenz R. Achsensymmetrische Verzerrungen in diinnwandigen Hohlzylinder // Z Ver deut Ingr. - 52. - 1908. - pp. 1766-1793.
2. Тимошенко С.П. Einige Stabilitat sprobleme der Elastizitats theorie, Z Math Phys 58. - 1910. - pp. 337-357
3. Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем: Современные концепции, парадоксы и ошибки. 6-е изд. — М.: КомКнига, 2007. — 352 с.
4. Мануйлов Г.А., Косицын С.Б., Бегичев М.М. О явлении потери устойчивости продольно сжатой круговой цилиндрической оболочки. Часть 1: О послекритическом равновесии оболочки // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering Volume 12, Issue 3. - 2016. - p. 58-72
5. Almroth В.О. Postbuckling behavior of axially compressed circular cylinders, AIAA J 1(3). - 1963. - pp. 630-633.
6. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. М. Изд-во Технико-теоретической литературы. 1956 г. 419с.
7. Тимошенко С.П. Курс теории упругости. Киев: Наукова Думка. - 1972 г. - 567 с.
8. Геккелер И. Статика упругого тела. М.: Государственное технико-теоретическое издательство. -1934. - 288 с.
9. Fisher G.N. Uber den Einfluss der gelenkigen Lagerung auf die Stabilitat diinnwandiger Kreiszyinderschalen unter Axial- und Innendruck, Z Flugwissenschaften 11(3). - 1963. - pp. 111-116.
10. Ohira H. Local buckling theory of axially compressed cylinders. // Proceedings of the eleventh Japan national congress of applied mechanics, Tokyo. - 1961. - pp. 37-40.
11. Hoff N.J., Rehfield L.W. Buckling of axially compressed circular cylindrical shells at stresses smaller than the classical critical value // J. Appl. Mech. - Vol. 32. - 1965. - pp. 533-538.
12. Croll J.G.A., Batista R.A. Explicit lower bounds for the buckling of axially loaded cylinders // Int. J. Mech. Sci. 23. - No. 6. - 1981. - pp. 331-343.
13. Кильчевский Н.А. Об осесимметричных деформациях и упругой устойчивости круглой трубы, находящейся под действием сжимающих сил // ПММ, - 1942. - №6. - С. 497-508.

Статика и устойчивость тонкостенных стержней: исторический очерк

Аннотация: Рассматривается более чем 120-летняя история развития теории тонкостенных стержней (задачи статического равновесия и устойчивости). Названы основные проблемы этой теории и рассмотрена последовательность их возникновения и решения. Указаны авторы основных идей, послуживших основой современного подхода к теории тонкостенных стержней.

Статика тонкостенного упругого стержня

Довольно давно было обнаружено, что основная разница в поведении массивных и тонкостенных стержней относится к их работе на кручение. Известное задачи решение Сен-Венана о кручении призматического тела точно описывала поведение массивного стержня с круглым поперечным сечением, относительно неплохо — массивных стержней с другими поперечными сечениями, и совсем расходилось с наблюдаемым поведением тонкостенных стержней.

Классический период

По-видимому, к первым научным исследованиям этой проблемы можно отнести работу Рудольфа Бредта, который рассмотрел особенности свободного кручения стержней с некруглым трубчатым сечением [36]. На основе геометрических соображений и используя гидродинамическую аналогию, в которой поток погонных усилий $T(s) = \tau(s)t(s)$ сопоставляется с постоянным по длине потоком жидкости (рисунок 1), он сделал вывод, что касательное напряжение τ не может изменяться значительно по толщине стенки и в расчет под τ можно понимать среднее значение, и, таким образом, касательные напряжения обратно пропорциональны толщинам стенки. Так было получено правило:

«Для замкнутого тонкостенного профиля при малой толщине стенки t касательное напряжение считается распределенным равномерно по толщине стенки и определяется формулой:

$$\tau = \frac{M_t}{2At},$$

где A — площадь фигуры, охватываемая срединной линией сечения».

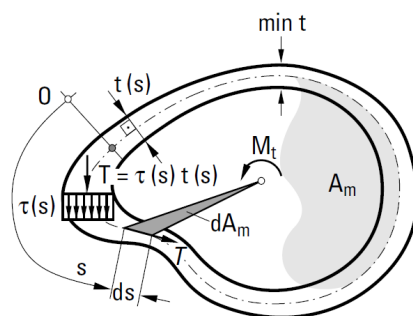


Рис. 1 – Схема Бредта

Это правило оказалось весьма практичным, хотя относилось только к одному случаю свободного кручения одноконтурного замкнутого тонкостенного стержня. Принципиально важный шаг в теории тонкостенных стержней был сделан Степаном Прокофьевичем Тимошенко, когда были опубликованы результаты его исследований кручения двутавровой балки, одно из сечений которой остается плоским [18].

Это тот редкий случай, когда можно назвать точное время открытия. Летом 1905 года С.П. Тимошенко проходил стажировку в лаборатории Людвиг Прандтля в Геттингене. В 1899 году Прандтль решил задачу об устойчивости плоской формы изгиба полосы, практически первую задачу об устойчивости тонкостенного стержня.

В своих воспоминаниях Тимошенко пишет:

«Прандтль предложил продолжить его собственную диссертацию. Он рассматривал боковое выпучивание при изгибе балок узкого прямоугольного сечения, но для практического применения, конечно, важнее изучить боковую устойчивость двутавровой балки. В таком случае нужно начать с кручения двутавровой балки. Здесь в первый раз выяснилось, что для рассмотрения этой задачи принцип Сен-Венана не применим. Угол закручивания зависит не только от величины скручивающего момента и жесткости балки на кручение, но и от способа закрепления ее концов. Если конец балки заделан, то очевидно при кручении полки балки претерпевают изгиб и этот изгиб должен быть учтен. Недели две прошло пока я догадался, как этот изгиб учесть и понял, что крутящий момент уравнивается такими напряжениями, как в обычном кручении, сложеными с моментом, образованным перерезывающими силами, возникающими при изгибе полок двутавровой балки» [22].

Здесь отчетливо указано различие между свободным и стесненным кручением, его демонстрирует рисунок 2, заимствованный из более поздней работы С.П. Тимошенко [21]. Полученное теоретическое решение задачи было проверено экспериментально, измеренные в опытах углы закручивания хорошо совпали с теоретическими значениями, вычисленными по формулам.

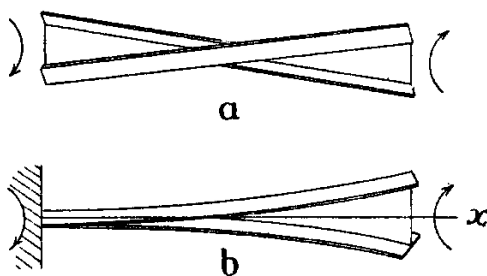


Рис. 2 – Свободное и стесненное кручение двутавра

В работе С.П. Тимошенко было отчетливо выявлено, что кручение двутаврового стержня проявляется в виде изгиба полок и поэтому сопровождается образованием самоуравновешенной системы нормальных напряжений в поперечных сечениях. Такой эффект появления нормальных напряжений в поперечных сечениях скручиваемого стержня важен для всех тонкостенных стержней с открытым профилем и в несколько меньшей мере для стержней с закрытым профилем. Оказалось, что в тонкостенных профилях при стесненном кручении возникают два дополнительных фактора (нормальные и касательные напряжения кручения), не учитываемые обычными формулами сопротивления материалов.

Следующим важным достижением в теории тонкостенных стержней было открытие центра изгиба, после того как в 1909 году Бах опубликовал результаты своих экспериментов [30], [31]. Производя опыты над металлической балкой швеллерного сечения, Бах установил, что поперечная нагрузка, действующая параллельно стенке швеллера и проходящая через его центр тяжести, наряду с деформациями изгиба вызывает также и деформации кручения. Деформации удлинений четырех крайних волокон швеллера при произвольном положении нагрузки не следуют закону плоских сечений. При прохождении поперечной нагрузки через ось стенки швеллера деформации от кручения в опытах Баха оказались значительно меньше, чем в случае приложения нагрузки в центре тяжести. Обнаружив опытным путем отклонения от закона плоских сечений, Бах объяснил это отклонение несимметричностью сечения. Объяснение неверное, но экспериментально установленный факт стал иницилирующим поводом для дальнейших исследований.

После работ Баха и Тимошенко вопрос о кручении тонкостенных балок, сопровождаемом изгибом отдельных элементов, в течение ряда лет в печати не освещался. Но в 1921 г., т. е. спустя 12 лет после опытов Баха, появилась работа Майларта [55], посвященная вопросу изгиба и кручения тонкостенных металлических балок. В этой работе автор, анализируя опыты Баха, отмечает, что отклонение от закона плоских сечений при кручении, сопровождаемом изгибом отдельных элементов, может иметь место также и в симметричных профилях.

В своих последующих статьях Майларт, кроме результатов экспериментальных исследований, приводит расчетные данные по определению центра изгиба [55]. Эти данные получены им на основании метода С.П. Тимошенко. Центр изгиба он определяет как точку, в которой уравнивается суммарный момент равнодействующих элементарных касательных напряжений (рисунок 3).

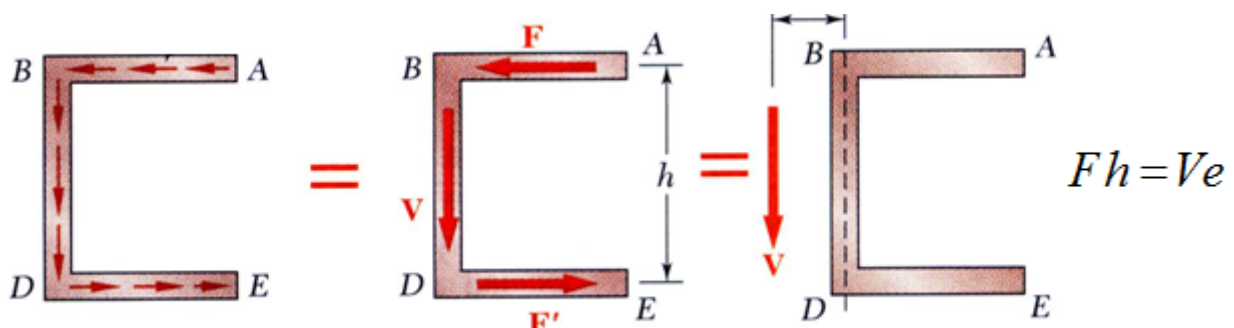


Рис. 3 – К определению центра изгиба

В 1927 г. появилась экспериментальная работа С.А. Бернштейна [2], в которой автор, подтверждая результат экспериментов Баха, отмечал значительное отклонение характера распределения нормальных напряжений в поперечных сечениях поясов ферм открытых мостов от закона плоских сечений и назвал это явление «депланацией».

В период с 1921 по 1926 г. были напечатаны работы Циммермана [74], Эгеншвилера [42], [43] и Вебера [73]. В последней работе автор, кроме метода определения центра изгиба, дает обобщение результатов Тимошенко по кручению двутавровой балки, указывая метод определения дополнительных нормальных напряжений при кручении для любых двухполочных профилей (двутаврового с одинаковыми и разными полками, швеллерного и зетового). В этой же работе Вебер обратил внимание на связь между центром изгиба и центром кручения, т. е. точкой сечения, которая при кручении не перемещается. Он оши-

бочно полагал, что обе эти точки при кручении, сопровождаемом изгибом полков профиля, совпадают.

В 1929 году Вагнер наметил черты теории тонкостенных стержней с произвольной формой открытого профиля [72]. При выводе своих формул для дополнительных нормальных напряжений от кручения Вагнер пользовался законом, аналогичным закону секториальных площадей, выведенному В.З. Власовым в 1936 г. для профилей произвольного очертания [4]. При рассмотрении деформации кручения Вагнер считал, что центр кручения при потере устойчивости совпадает с центром изгиба. В действительности же центр кручения, как правило, не совпадает с центром изгиба. Совпадение получается только в одном частном случае поперечного сечения стержня, а именно, когда центр изгиба совпадает с центром тяжести сечения. По-видимому, впервые на неточность результатов Вагнера обратил внимание Остенфельд [62], получивший точные решения для таврового, уголкового и швеллерного сечений.

В 1936 году Фридрих Блейх и Ганс Блейх опубликовали теорию изгиба, кручения и устойчивости тонкостенного стержня с полигональным открытым профилем [35]. В задаче устойчивости авторы этой статьи, пользуясь энергетическим методом, получили систему трех дифференциальных уравнений, относящихся к случаю центрального сжатия.

Однако они исходили из закона плоских сечений и заменяли заданные в поперечном сечении нормальные напряжения равнодействующей, принимая ее за сосредоточенную силу, приложенную в центре тяжести. Вследствие такой замены был потерян один из трех корней соответствующего детерминантного уравнения, а для двух других корней получены неточные результаты.

Теория изгиба, кручения и устойчивости тонкостенного стержня произвольного профиля предложена Каптусом в 1937 году [49], на год позже работы В.З.Власова [4].

В вышедшей в 1940 году книге В.З. Власова по тонкостенным стержням [5] постановка задачи и её решение изложены с максимальной полнотой. В.З. Власов отталкивался от разработанной им теории цилиндрических оболочек, но для тонкостенного стержня же резко упростил общие уравнения, введя две кинематические гипотезы: гипотезу об отсутствии сдвигов срединной поверхности и гипотезу о неизменяемости формы поперечного сечения. При этом оказалось, что деформация в случае стесненного кручения отличается лишь масштабом от деформации, соответствующей свободному кручению того же стержня (этот масштаб меняется от сечения к сечению).

В формуле для нормального напряжения, помимо трёх обычных членов, фигурирует слагаемое, инициируемое бимоментом и определяемое по закону секториальной площади. Построенная теория позволила дать исчерпывающее решение задачи о работе тонкостенного стержня при кручении, об изгибно-крутильной форме потери устойчивости и колебаниях тонкостенных упругих стержней, а также развить методы расчета стержней с упругими и жёсткими связями и методы расчёта стержней при поперечных нагрузках.

В этой теории возникли новые необычные понятия бимоента, секториального момента инерции и др. но, как показала жизнь, к ним быстро привыкли. Детально исследован вопрос о применимости принципа Сен-Венена и показано, что он здесь имеет ограниченное применение. В частности, Власов обнаружил эффект закручивания тонкостенного стержня под влиянием продольной нагрузки. Так, например, для зетобразного профиля при растяжении стенки удлинение ее крайних волокон приводит к изгибу полков и закручиванию профиля (рисунок 4).

В последующие годы появилась огромная литература, посвященная обсуждению основ теории В.З. Власова, разработке методических вариантов ее построения (см., например, работы [11], [12]), в которых анализировались возможности отказа от некоторых гипотез.

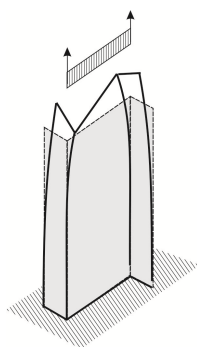


Рис. 4 – Эффект закручивания

Гипотеза о неизменяемости контура сечения особых возражений не вызвала. Дело в том, что подкрепляющие элементы типа ребер жесткости, диафрагм и т. п. в самом деле создают условия, близкие к тем, которые утверждаются в этой гипотезе. Значительно больше внимания было уделено гипотезе об отсутствии сдвигов в срединной поверхности.

Наиболее обоснованно исследование точности этой теории выполнено А. Л. Гольденвейзером [6]. Исходя из теории оболочек он показал, что гипотеза о недеформируемости контура выполняется достаточно точно даже для коротких стержней, в то же время гипотеза об отсутствии сдвигов – не влечет за собой существенных ошибок лишь при условии $d/L \sim t/d \ll 1$.

Проблема расчетного анализа стесненного кручения тонкостенного стержня с закрытым профилем несколько задержалась в своем развитии. Решение Бредта удовлетворяло инженеров-практиков, а исследователи боролись с загадками стержней открытого профиля. Только в 1926 г. Рейсснер рассмотрел стесненное кручение прямоугольного коробчатого стержня [64], и затем в течение многих лет этот частный случай являлся, в сущности, единственным объектом исследований в рассматриваемой области.

Первая в мировой литературе публикация, посвященная стесненному кручению тонкостенных стержней с закрытым профилем, относится к 1932 г. и принадлежит В. Н. Беляеву [1]. Им рассмотрена коробка прямоугольного сечения, состоящая из четырех относительно мощных поясов, четырех тонких стенок и некоторого числа диафрагм. Для упрощения решения В.Н. Беляев предложил считать стенку не работающей на нормальные напряжения (в сечении, перпендикулярном оси конструкций) и способной воспринимать лишь касательные напряжения; в то же время им было принято, что угловые пояса работают только на продольные усилия (рисунок 5). В. Н. Беляев получил удобную цепную систему уравнений для определения лишних неизвестных («уравнение трех осевых сил»).

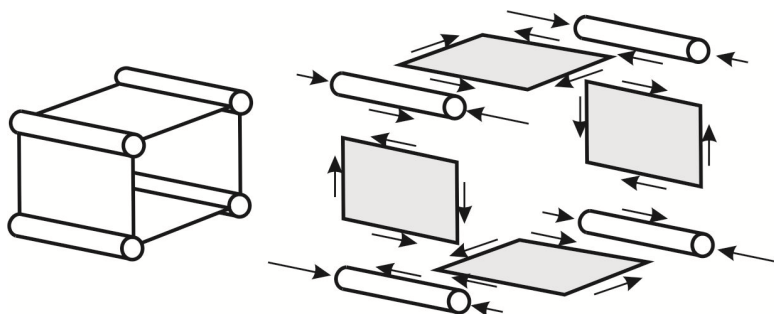


Рис. 5 – Модель тонкостенного стержня с замкнутым сечением

Важное значение работы В. Н. Беляева заключается в обнаружении и анализе явления стесненного кручения в конструкциях с закрытым профилем, однако предложенная

им методика, непосредственно относилась только к четырехпоясным конструкциям и не давала возможности исследовать стесненное кручение в более общем случае.

Толчок новым исследованиям дала авиация, здесь потребовалось детально предсказать особенности поведения моноблочного крыла самолета при кручении. Создание прикладной теории тонкостенных стержней с закрытым профилем произвольной формы обязано, в основном, трудам А.А. Уманского. Им был предложен оригинальный метод расчета тонкостенных стержней с жестким закрытым профилем и рассмотрено на основе бимоментной теории ряд новых задач по расчету плоских спаренных стержневых конструкций, названных им биконструкциями. Такое исследование, выполненное А. А. Уманским [25]., положило начало изучению обширной проблемы стесненного кручения для общего случая конструкций произвольного замкнутого профиля. А.А. Уманский выдвинул предложение описывать депланацию при стесненном кручении тем же законом, что и в случае свободного кручения (однако мера депланационных перемещений является переменной по длине конструкции), а форму сечения в его плоскости считать неискажаемой (рисунок 6).

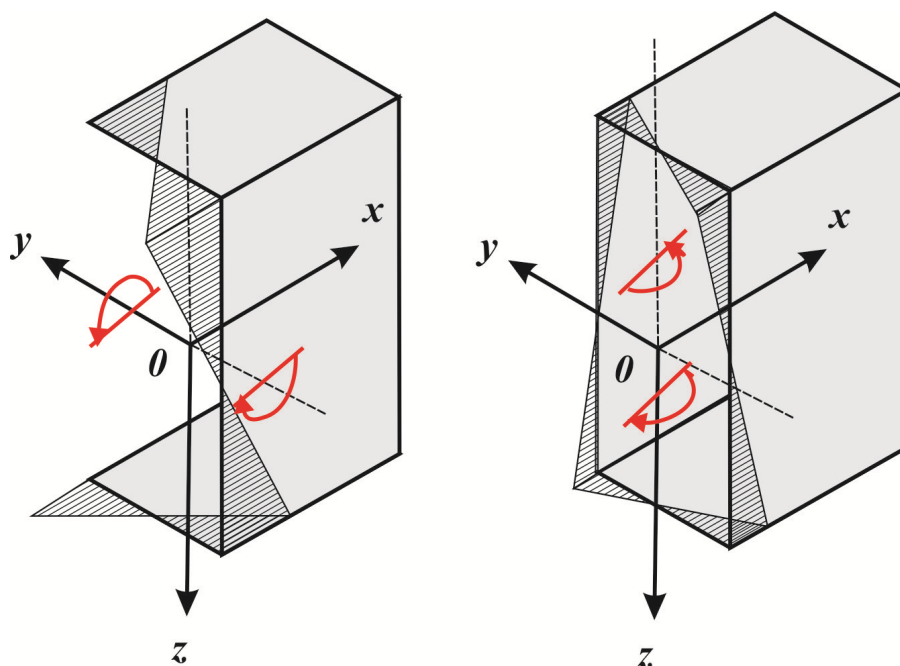


Рис. 6 – Депланации и бимоменты стержня с открытым и замкнутым сечением

На этой основе было получено вполне общее решение задачи о стесненном кручении стержня с произвольным закрытым профилем. Замкнутость контура сечения явилась причиной появления одной дополнительной неизвестной функции и поэтому потребовала составления еще одного условия; последнее А. А. Уманский сформулировал в виде некоторого приближенного интегрального соотношения.

В последующей работе А. А. Уманского [26] указанное соотношение было заменено другим, причем вторая редакция теории А. А. Уманского оказалась более точной. Значительно позднее этих трудов появились совершенно аналогичные публикации (без ссылок на А. А. Уманского). Первый вариант теории А. А. Уманского изложен в работах Кармана и Кристенсена [51], Райтхеля [63] и Рюдигера [66]. Второй вариант теории А. А. Уманского изложен в публикации Грассе [45].

В книге Джанелидзе и Пановко [13], помимо основных результатов, относящихся к обоснованию бимоментной теории изгибного кручения стержней открытого профиля, с

достаточной полнотой излагаются также и методы определения напряжений и деформаций при стесненном кручении стержня закрытого профиля.

Они также рассмотрели способы решения задач о стесненном кручении, основанные на приближенной замене тонкостенного стержня системой тонких поясов, работающих на продольные усилия и связанных обшивкой, работающей только на сдвиг (схема В.Н. Беляева, рисунок 5). В 1950 году к этой схеме пришел Бенскотер [33], затем ее эффективно развивали Аргирис и Келси [29].

Распространение бимоментной теории изгибного кручения на тонкостенные плоские криволинейные стержни дано в работах Н.Я. Грюнберга [10], Г.Ю. Джанелидзе [12], А.Р. Ржаницына [15] и А. А. Уманского [26].

Примерно в эти же годы начались исследования работы тонкостенного стержня за пределом упругости. К числу первых относится статья [15]. В институте механики АН УССР под руководством А.И. Стрельбицкой были проведены экспериментальные исследования, имевшие большое практическое значение [19].

Возвращение к истокам

Стремление к более строгому обоснованию практических методов анализа, характерное для последнего времени, породило ряд работ, посвященных строгому анализу гипотез, положенных в основу прикладных вариантов теории тонкостенных стержней.

В качестве характерной можно назвать работу [65], в которой теория Власова получена как асимптотическое приближение трехмерной модели призматического тела, у которого толщина элементов поперечного сечения устремляется к нулю. Работы упомянутого направления часто, иницируются не только стремлением к «наведению порядка в основах», но и проблемами построения достаточно универсальных алгоритмов для программирования задачи с целью ее численного решения. Здесь зачастую нельзя полагаться на инженерное чутье и неформальный анализ, с помощью которых выбирается та или иная используемая гипотеза, а необходимо иметь четко формализуемые правила поведения.

Много лет исследователей не устраивала нестыковка бессдвиговой теории тонкостенных стержней открытого профиля и с учетом сдвигов в теории тонкостенных стержней замкнутого профиля.

Предпринимались различные попытки примирить эти подходы, учитывая тем или иным способом влияние деформаций сдвига на работу тонкостенного стержня. Заметный результат был получен относительно недавно В.И. Сливкером [17], который предложил представить касательные напряжения как сумму двух слагаемых: касательных напряжений изгиба, порожденных поперечными силами, и касательными напряжениями кручения, вызываемыми моментом стесненного кручения.

Далее было предложено пренебречь касательными напряжениями изгиба, отнеся их в разряд второстепенных, сохранив в то же время касательные напряжения кручения. Такая полусдвиговая теория является универсальной для расчета как тонкостенных стержней открытого профиля (на основе теории В.З. Власова), так и закрытого профиля (на основе теории А.А. Уманского) ввиду схожести соответствующих дифференциальных уравнений кручения и энергетических функционалов. При этом решалась и проблема расчета стержней с замкнуто-разомкнутым поперечным сечением.

Важным допущением теории тонкостенных стержней является гипотеза о неизменяемости формы поперечного сечения. Однако в некоторых случаях эта гипотеза впадает в противоречие с данными наблюдений. Еще в начале XX века на этот факт обратили внимание при исследовании поведения криволинейных труб, когда результаты расчета по

обычной теории стержней сильно разошлись с фактически наблюдаемой картиной деформаций. Статья Т. Кармана [50] была первой, ставшей классической, работой, в которой была вскрыта причина заметного отличия теоретических данных с экспериментальными.

Впоследствии результаты отказа от гипотезы о недеформируемости поперечного сечения стали интенсивно изучаться, когда актуальными стали вопросы местной устойчивости стальных конструкций, выполненных из тонкостенных гнутых профилей. Математические трудности решения этой нелинейной задачи надолго задержали исследования в этой области, и лишь использование численных методов анализа, в частности, метода конечных элементов сделал такую постановку задачи практической. Так, например, в работе [59] автор рассматривает равновесие тонкостенного стержня с недеформируемым и деформируемым поперечным сечением, а также касается вопросов устойчивости.

Чаще всего численные исследования поведения тонкостенных стержней выполняются с использованием метода конечных элементов. Здесь решаются в том числе и нелинейные задачи, аналитическое решение которых практически неосуществимо, и одной из первых работ такого типа можно считать статью Р. Барсума и Р. Галлагера [32], в которой рассматривалось решение задачи об устойчивости плоской формы равновесия тонкостенного стержня открытого профиля при чистом изгибе. В других работах исследуется поведение тонкостенного стержня при больших перемещениях и другие вопросы нелинейного поведения [37], [57], [39].

Устойчивость равновесия

Действие продольной силы

Как было отмечено выше, теория тонкостенных стержней зародилась из задачи об устойчивости плоской формы изгиба двутавровой балки. Но серьезное исследование устойчивости таких стержней при действии продольной силы началось, по сути, у В.З. Власова. В рамках его подхода задача об устойчивости плоской формы изгиба становится частным случаем общей теории устойчивости равновесия тонкостенных стержней. Были обнаружены некоторые принципиальные различия в поведении тонкостенного стержня от обычного стержня Бернулли-Эйлера.

Во-первых, оказалось, что при внецентренном действии продольной силы явление потери устойчивости может возникнуть как в случае сжатия, так и в случае растяжения. В случае сжатия стержень может потерять устойчивость при любом положении силы в поперечном сечении; в случае же растяжения явление потери устойчивости может иметь место при условии, если продольная сила приложена вне области устойчивости, которая представляет собой круг независимо от формы поперечного сечения стержня.

Во-вторых, изгибная и крутильная формы потери устойчивости равновесия в общем случае центрально сжатого стержня не разделяются. И если координаты центра изгиба не равны нулю, (центр изгиба не совпадает с центром тяжести сечения), то эйлеровская изгибная форма потери устойчивости при центральном сжатии становится невозможной. Естественной формой потери устойчивости для такого стержня является изгибно-крутильная, при которой критическая сила будет иметь меньшее значение, чем сила, получаемая при обычной теории продольного изгиба.

Уравнения устойчивости равновесия тонкостенных стержней, полученные В.З. Власовым, вызвали в свое время оживленную дискуссию. Основным побудительным мотивом этой дискуссии был способ вывода этих уравнений, при построении которых Власов исходил не из условий устойчивости равновесия, приводящих к однородным уравнениям, а из деформационных уравнений, отбрасывая затем их правые части при определении

критических сил. Математически безупречный путь построения уравнений устойчивости для тонкостенных стержней, не оставляющий лазеек для последующих споров по поводу строгости вывода этих уравнений и основанный на вариационном критерии устойчивости, был указан лишь в 1965 году В.В. Болотиным [3].

Довольно давно было обнаружено, что основная разница в поведении массивных и тонкостенных стержней относится к их работе на кручение. Известное задачи решение Сен-Венана о кручении призматического тела точно описывала поведение массивного стержня с круглым поперечным сечением, относительно неплохо — массивных стержней с другими поперечными сечениями, и совсем расходилось с наблюдаемым поведением тонкостенных стержней.

Местная устойчивость

С уменьшением толщины элементов тонкостенного стержня начинают проявляться такие особенности поведения, которые не отображаются классической теорией В.З. Власова, базирующейся на гипотезе о неизменности контура поперечного сечения стержня и рассматривает только три формы потери устойчивости (изгибную, крутильную изгибно-крутильную).

Возможность нарушения контура поперечного сечения тонкостенного стержня при сжатии и изгибе проявляется в виде локальной потери устойчивости, когда выпучиваются отдельные пластины, составляющие контур. При этом линии контакта смежных пластин остаются прямолинейными (рисунок 7б).

Позднее в экспериментальных работах Д.Б. Двигхта [41] и теоретических исследованиях М.Л. Шарпа [67] обращается внимание на особую местную форму потери устойчивости, связанную с потерей устойчивости одновременно нескольких упруго сопряженных пластин составляющих стержень, которую назвали дисторсией (рисунок 7в).

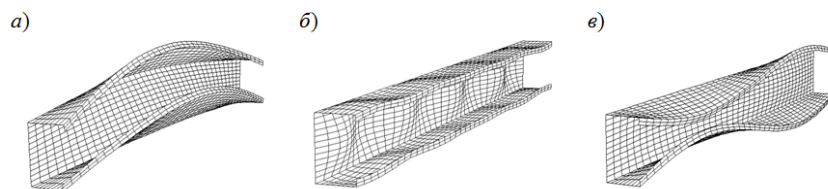


Рис. 7 – Потеря устойчивости тонкостенного стержня:
а – изгибно-крутильная, б – местная, в – дисторсная

Работы по оптимизации форма поперечного сечения тонкостенных стержней показали, что для таких сечений дисторсия часто является доминирующей формой потери устойчивости. Этот факт стимулировал исследования дисторсии и развитие соответствующих методов анализа. В качестве инструмента исследования Хенкок и Лау развивали и популяризировала метод конечных полос [46], [47]. Они исследовали роль граничных условий и провели сопоставление с данными экспериментов, где была обнаружена дисторсия.

Эксперименты показали, что несущая способность тонкостенного стержня в момент местного выпучивания может быть не исчерпанной. Для того, чтобы судить о несущей способности, необходимо исследовать закритическое поведение сжатого стержня. При этом решаются следующие задачи:

1) установление закона распределения напряжений в закритической стадии по ширине элемента с целью определения «эффективной», воспринимающей нагрузку, части пластины;

2) исследование общей устойчивости и расчет разрушающей нагрузки стержня с ослабленным («редуцированным») сечением.

Первую задачу – определение эффективной ширины (или "редукционного коэффициента") отдельной пластинки после местного выпучивания впервые рассмотрел И.Г. Бубнов. Позже Т.Карман [51] представил инженерную методику учета влияния потери местной устойчивости, основанной на понятии «эффективного сечения», когда снижение несущей способности отдельной пластины вследствие ее выпучивания заменялось условным «выключением» из работы ее части. С учетом модификации, предложенной Винтером по результатам экспериментов, эта методика используется и сегодня.

Различными исследователями были получены различные формулы для определения редуцированного коэффициента. Необходимо отметить, что точные решения имелись для отдельных пластин с идеализированными граничными условиями (шарнирное опирание, жесткое защемление) и применительно к тонкостенным конструкциям такие решения можно рассматривать только как приближенные. В связи с этим представляет интерес работа Койтера [53] где получена простая формула для оценки снизу редуцированного коэффициента.

Задачу о несущей способности тонкостенных стержней, составленных из пластин, после местного выпучивания, по-видимому, впервые рассмотрели Байлард и Фишер [34]. Исследовались сжатые стойки двутаврового и квадратного сечений. Было показано, что дополнительные (к местной форме) перемещения тонкостенных элементов стержня обусловленные общим изгибом подобны второй местной форме.

В первых работах рассматривалась только односторонняя трактовка взаимодействия форм выпучивания, т.е. учет влияния только лишь локального выпучивания на последующую общую потерю устойчивости. Такой подход может быть достаточным в случае, когда напряжения общего выпучивания значительно выше критических напряжений местной формы, и обе стадии процесса выпучивания можно разделить.

В общем случае местные и общие формы выпучивания могут сложным образом влиять друг на друга, и это «взаимовлияние оказывается важным фактором, определяющим несущую способность. Игнорирование этой особенности поведения сжатых тонкостенных стержней может привести на практике к весьма опасным последствиям. Так, например, было высказано предположение о том, что именно взаимодействие форм общей и местной потери устойчивости явилось вероятной причиной ряда крупных катастроф стальных мостов в Вене (1969г.), Милфорде (1970г.), Мельбурне (1970г.), Кобленце (1971г.). Разрушение происходило при нагрузках ниже теоретических на 30% и более (при этом расчетные критические напряжения общего выпучивания и местного выпучивания ребер были близки).

Важным этапом в развитии теории связанного выпучивания пластинчато-стержневых систем явилась работа Нейта [60], рассматривающая стойку коробчатого сечения в виде модели, состоящей из двух несущих полок-пластин (жесткостью боковых пластин пренебрегается). Благодаря учету местных несовершенств, предельная нагрузка может оказаться как ниже, так и выше критического значения нагрузки для местной формы. Новизна работы [Neut, 1969] состояла, прежде всего, в обнаружении неустойчивости равновесия стойки в точке бифуркации в случае близости критических напряжений эйлерового и местного выпучивания и связанной с этим чувствительности к несовершенствам для стоек, близких к равноустойчивым.

Предложенная в работе [60] модель служила удобным объектом для исследования вопросов связанного выпучивания реальных конструкций. Ее использовали [71], [61], [44], [68] и др. Был сделан вывод о том, что именно связанное выпучивание в упруго-пластической

области, как правило, определяет несущую способность стойки. В работе [71], использовавшей модель Нейта при решении задачи оптимального проектирования, было показано, что при наличии местных несовершенств оптимальная стойка не является равноустойчивой и соответствует условию повышенного запаса по местной форме.

Системы из тонкостенных стержней

Как правило, тонкостенные стержни работают не одиночно, а в составе плоских или пространственных систем. В связи с этим появились работы, где была предпринята попытка решить соответствующие задачи. Основной проблемой здесь оказался вопрос совместности деформаций в узлах стыковки тонкостенных элементов. Этот вопрос легко решается для неразрезного тонкостенного стержня, у которого на промежуточной опоре совпадают деформации торцевых сечений стыкуемых элементов.

По-видимому, первым, кто попытался решить вопрос о расчет рамы, составленной из тонкостенных стержней был Б.Н. Горбунов, который указал метод расчета плоских рам такого типа при пространственном нагружении [7].

Здесь, как и в последующих работах Б.Н. Горбунова с А.И. Стрельбицкой [8], [9], где освещались вопросы расчета тонкостенных вагонных рам, использовалась гипотеза об абсолютной жесткости в своей плоскости узловой фасонки, что обеспечивало равенство деформаций торцевых сечений всех стержней сходящихся в узле (рисунок 8).

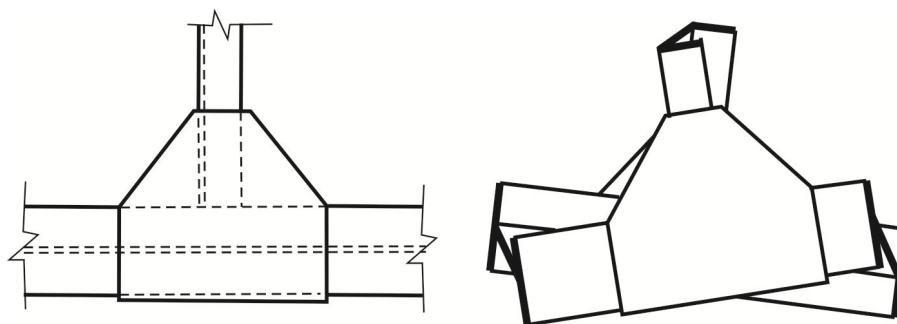


Рис. 8 – Узел вагонной рамы

Предпринималось немало попыток построения достаточно универсального алгоритма для расчета произвольных тонкостенных стержневых систем, и здесь основной проблемой была формулировка краевых условия на концах тонкостенного стержня. В некоторых работах исходили из того, что на конце стержня деформация либо полностью отсутствует, либо не встречает никаких препятствий. Одной из первых работ этого направления была публикация Ставраки [18]. В ней рассматривались пространственные (в частности, циклически симметричные) системы из тонкостенных стержней, предполагая, что их узлы являются либо бесконечно жесткими, и деформация торцевых сечений всех сходящихся в узле стержнем равна нулю, либо конструкция узла такова, что для всех торцевых сечений обеспечивается свобода деформации. В других исследованиях использовалась гипотеза о равенстве деформаций на торцах всех сходящихся в узле тонкостенных стержней (см., например, [27]), в несколько измененной форме эта же гипотеза присутствует в работе [23], в которой вводится понятие «коэффициент преобразования деформации». Эти коэффициенты задаются для перехода типа «стержень – стержень», а не «стержень – узел» и определяется для пары стержней, примыкающих к узлу. Каким он будет для третьего, четвертого и т.д. стержня, которые могут сходиться в узле неизвестно. А поскольку, как нетрудно доказать, деформация является скаляром, то полностью лишены смысла выражения типа «ориентация оси деформации», а также все прочие манипуляции с изменением

ориентации таких «осей», которыми насыщена книга [23]. В общем случае несостоятельность гипотезы о равенстве депланаций всех торцевых сечений примыкающих к узлу была продемонстрирована в работе [14]. На простых примерах было показано, что депланации торцевых сечений всех сходящихся в узле элементов не совпадают, а их значения зависят от конструкции узла, деформация которого оказывает заметное влияние на поведение конструкции. Использование суперэлемента-узла, введенного и исследованного в [69], [58], позволяет учесть взаимодействие между внутренними усилиями и деформацией узла и торцевыми сечениями примыкающих к нему тонкостенных стержней. Были предложены и другие приемы расчета, позволяющие учесть деформативность узловых соединений [28], [38], [52].

Список литературы

1. Беляев В.Н. К расчету пространственной коробчатой системы при действии закручивающих сил // Техника воздушного флота, 1932, №4
2. Бернштейн С.А. Опытное исследование работы верхнего пояса открытого моста // Исследование напряжений и деформаций при статической работе моста, Вып. 60 — М.: Транспечать, 1927.— С. 288–296.
3. Болотин В.В. О понятии устойчивости в строительной механике. // Проблемы устойчивости в строительной механике. — М.: Стройиздат, 1965. — С. 6-27
4. Власов В.З. Новый метод расчета призматических балок из тонкостенных профилей на совместное действие осевой силы, изгиба и кручения // Вестник Военно-инженерной академии РККА, 1936, №20
5. Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни — М.: Госстройиздат, 1940
6. Гольденвейзер А.Л. О теории тонкостенных стержней // Прикладная математика и механика, Том 13, вып. 6, 1949
7. Горбунов Б.Н. Расчет пространственных рам из тонкостенных стержней // Прикладная математика и механика, 1943. Том 7, вып. 1.
8. Горбунов Б.Н., Стрельбицкая А.И. Теория рам из тонкостенных стержней. — М.: Гостехиздат, 1948. — 198 с.
9. Горбунов Б.Н., Стрельбицкая А.И. Расчет прочности тонкостенных стержневых систем // Расчет пространственных конструкций. Вып. 1. — М.: Изд-во министерства строительства предприятий машиностроения, 1950. — С. 97–162.
10. Грюнберг Н.Я. Изгиб и кручение тонкостенных криволинейных стержнем // Труды лаб. строит. механики ЦНИПС, 1949.
11. Джанелидзе Г.Ю. Вариационная формулировка теории тонкостенных упругих стержней В. З. Власова // Прикл. матем. и механ., т. VII, вып. 6, 1943.
12. Джанелидзе Г.Ю. Теория тонких криволинейных стержней, обладающих в поперечном сечении недеформируемым контуром // Прикл. матем. и механ., т. 8, вып. 1, 1944.
13. Джанелидзе Г.Ю., Пановко Я.Г. Статика упругих тонкостенных стержней, Гостехиздат, 1948. — 208 с.
14. Перельмутер А.В., Юрченко В.В. О расчете пространственных систем из тонкостенных стержней открытого профиля // Строительная механика и расчет сооружений, 2012, № 6. — С. 18-25.
15. Ржаницын А.Р. Сложное сопротивление тонкостенных стержней с недеформируемым контуром в пределах и за пределами упругости // Труды лаборатории строительной механики ЦНИПС М.: Стройиздат, 1941
16. Ржаницын А.Р. Расчет металлических двутавровых балок, получивших начальное искривление в горизонтальной плоскости, 1946.
17. Сливкер, В. И. Строительная механика. Вариационные основы — М.: Издательство АСВ, 2005.— 736 с.
18. Ставраки Л.Н. Пространственные прямоугольные рамы из тонкостенных стержней // Вайнбкрд Д.В., Чудновский В.Г. Пространственные рамные каркасы инженерных сооружений — К.: Гостехиздат Украины, 1948.
19. Стрельбицкая А.И. Экспериментальное исследование кручения тонкостенных балок за пределом упругости // Инженерный сборник 1952, т. XIII.

20. Тимошенко С.П. Об устойчивости плоской формы изгиба двутавровой балки под влиянием сил, действующих в плоскости ее наибольшей жесткости // Известия СПб Политехнического института, т. IV, вып. 3-4, 1905 – С. 151–219; т. V, вып. 1–2, 1906 – С. 3-34; т. V, вып. 3-4, 1906 – С. 263-292.
21. Тимошенко С.П. Об устойчивости упругих систем. Применение новой методы к исследованию устойчивости некоторых мостовых конструкций // Известия Киевского политехнического института. Отдел инженерной механики, Книга 4, 1910 С. 375-560
22. Тимошенко С.П. Воспоминания – М.: Вузовская книга, 2014 – 444 с.
23. Туснин А. Р. Численный расчет конструкций из тонкостенных стержней открытого профиля. – М.:Изд-во АСВ, 2009. – 143 с.
24. Уманский А.А. Кручение и изгиб тонкостенных авиаконструкций.– М.: Оборонгиз, 1939.– 112 с.
25. Уманский А.А. О нормальных напряжениях при кручении крыла самолета // Техника воздушного флота, 1940, №12, с. 48-65.
26. Уманский А.А. Расчет тонкостенных кривых балок // Труды научно-технической конференции ВИА им. Н.Е. Жуковского. Вып. 2, том 2 М.: Издание ВИА, 1944 – С. 35-48.
27. Урбан И.В. Теория расчета стержневых тонкостенных конструкций – М.: Трансжелдориздат, 1955 – 193 с.
28. Черный А.Н. К вопросу моделирования узловых соединений тонкостенной стержневой системы // Механика и процессы управления. – Ульяновск: УГТУ, 1996. – С. 54–58.
29. Argyris J.H., Kelsey S. Energy theorems and Structural Analysis –London: Butterworth Scientific publications, 1960 [Русск. перевод: Аргирис Дж. Энергетические теоремы и расчет конструкций // Современные методы расчета сложных статически неопределимых систем – Л.: Судпромгиз, 1961. – С. 37-293.]
30. Bach C. Versuche uber die tatsachliche Widerstandskraft von Balken mit U-formigem Querschnitt // Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1909, vol. 53 – P. 1790–1795.
31. Bach C. Versuche über die tatsachliche Widerstandskraft von Trägern mit U-formigem Querschnitt // Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1910, vol. 54 – P. 382–387.
32. Barsoum R.S., Gallagher R.H. Finite Element Analysis of Torsional and Torsional Flexural Stability Problems // Int. J. Num. Methods Engrg., 1970, Vol. 2, – P. 335-352
33. Bescoter S.U. Secondary stresses in thin-walled beams with closed cross-sections. Dissertation (Ph.D.), California Institute of Technology, 1950
34. Bijlaard P.P., Fischer G.P. Column strength of H-section and square tube in postbuckling range of component plates. NACA, TN-2994, 1954.
35. Bleich F. Bleich H. Bending, torsion and buckling of bars composed of thin walls // IABSE Congress Report, 1936, Volume 2 – P. 871-894.
36. Bredt R. Kritische Bemerkungen zur Drehungselastizitat. // ZVDI, 1896, vol. 40, № 28 – P. 785–790 & № 29 – P. 813–817.
37. Chen H., Blandford G.E. Thin-walled Space Frames. I: Largedeformation Analysis Theory. // J. Struct. Engrg., ASCE, 1991, Vol. 117, № 8 – P. 2499–2520
38. Cichoń C., Koczubiej S. Consistent FEM model for thin-walled space frames // Czasopismo Techniczne, 21, Budownictwo 1-B, 2008, vol. 21. – P. 3–20.
39. Conci, A., Gattass M. Natural Approach for Geometric Nonlinear Analysis of Thin-walled Frames. // Int. J. Numer. Methods Engrg., 1990, Vol. 30 – P. 207–231
40. Distortions, Solid Mechanics, - 2, 25, Elsevier, pp 553 - 573.
41. Dwight J.B. Aluminum Sections with Lipped Flanges and Their Resistance to Local Buckling // Proceeding Symposium on Aluminum in Structural Engineering London: 1963
42. Eggenschwyler A. Zur Frage des Schubmittelpunktes // Schweizerische Bauzeitung, 1924, vol. 83, № 22, – P. 259–261.
43. Eggenschwyler A. Über die Drehungsbeanspruchung von dünnwandigen symmetrischen-formigen Querschnitten // Der Eisenbau, 1921, vol. 12, № 9 – P. 207–215.
44. Gilbert B.B., Galladine C.R. Interaction between the effects of local and overall imperfections on the buckling of elastic columns // J. Mech. Phys. Solids, 1974, Vol. 22, – P. 519–549.
45. Grasse W. Wolburafftorsion dtinnwandiger prismatischer Stabe beliebigen Querschnitts. Ingenieur-Archiv, 1965, Bd. 34, №5.
46. Hancock G.J. Distortional Buckling of Steel Storage Rack Columns//Proc. ASCE. Journal of Structural Engineering, 1985, Vol. 111,12 – P. 2770–2783.
47. Hancock G.J., Lau S.C.W. Distortional Buckling Formulas for Channel Columns // Proc. ASCE. Journal of Structural Engineering, 1987, Vol.113, No 5 – P. 1063 – 1078.

48. Hikosaka H., Takami K., Maruyama Y. Analysis of Elastic Distortional Instability of Thin-Walled Members with Open Polygonal Cross Section // Proceedings of Japan Society of Civil Engineers, Structural Eng./Earthquake Eng., 1987, Vol. 4, № 1 – P. 31 – 40.
49. Kappus R. Drillknicken zentrisch gedrückter Stäbe mit offenem Profil im elastischen Bereich // Luftfahrtforschung, 1937. Bd. 14, Nr. 9 – P. 444–457.
50. Karman Th. Über die Formänderung dünnwandiger Rohre, insbesondere federnder Ausgleichrohre // Zeitschrift für Vereines deutscher Ingenieure, 1911, Band 55, № 45
51. Kármán Th., Christensen N.B. Methods of analysis for torsion with variable twist // Journal of the Aeronautical Sciences, 1944, Vol. 11, No 2 – P. 110–124.
52. Koczubiej S., Cichoń C. Shell-beam model of thin-walled space structures for geometrically nonlinear analysis // Proceeding of the 19th International Conference on Computer Methods in Mechanics CMM-2011, 9–12 May, 2011, Warsaw, Poland (Full text on CD-ROM).
53. Koiter W.T. General theory of mode interaction in stiffened plate and shell structures // WTHD Report №590, 1976 – 41 p.
54. Lau S.C.W., Hancock G.J. Distortional Buckling Formulas for Channel Columns // Proc. ASCE. Journal of Structural Engineering, 1987, Vol.113, No 5 – P. 1063 – 1078.
55. Maillart R. Zur Frage der Biegung // Schweizerische Bauzeitung, 1921, №18. – C. 195–197.
56. Maillart R. Über Drehung und Biegung // Schweizerische Bauzeitung, 1922, №20. – C. 254–257.
57. Meek J.L., Lin W. J. (). Geometric and Material Nonlinear Analysis of Thin-walled Beam-columns. // J. Struct. Engrg., ASCE, 1990, Vol. 116, № 6 – P. 1473–1489.
58. Mikulski T.: Thin-Walled Frames. Modeling and Sensitivity Analysis. Gdansk University of Technology –Gdansk: Publishers, Monographs, 2010.
59. Nedelcu M. Stability aspects for metallic structures: Ph. d. thesis. Technical University of Cluj-Napoca, 2009– 107 p.
60. Neut A. The interaction of local buckling and column failure of thin-walled compression members // Proc. 12 Int. Congr. Appl. Mech. (Stanford Univ. 1968), Springer-Verlag, 1969.-P. 389–399.
61. Neut A. The sensitivity of thin-walled compression members to column imperfection // Int. J. Solids and Structures,- V 9, 1973.- P. 999–1011.
62. Ostenfeld A., Politeknisk Laezean stats Laboratorum for Bygningsstatik – Kopenhagen: Meddelelse, 1931.
63. Raithel A. La sollecitazione di torsione semplice delle travi a parete sottile // Giornale del Ggenio civile, 1963, 101, №10,
64. Reissner H. Neuere Probleme aus der Flugzeugstatik // Zeitschrift fur Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, 1926, № 18 – P. 384-393.
65. Rodriguez J.M., Viano J.M. Asymptotic derivation of a general linear model for thin-walled elastic rods // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 1997, Vol. 147 P. 287–321.
66. Rudiger D. Wolburafftorsion dtinnwandiger Hohlquerschnitte // Ingenieur–Archiv, 1964, Bd. 33, №5.
67. Sharp M.L. (1966). Longitudinal Stiffeners for Compression Members // Journal of the Structural Division. Prjceeding ASCE, 1966, Vol. 92, N0 ST5 – P. 187–211
68. Svensson S.E., Croll J.G.A. Interaction between local and overall buckling //Int. J. Mech. Sci., 1977, Vol. I7, №4 – P. 307–321.
69. Szymczak C., Kreja I., Mikulski T., Kujawa M.: Sensitivity Analysis of Beams and Frames made of Thin-Walled Members. – Gdansk: Gdansk University of Technology Publishers, 2003.
70. Takahashi, K. (1988), "A New Buckling Mode of Thin-Walled Columns with Cross-Sectional
71. Thompson J.M.T., Lewis G.M. On the optimum design of thin-walled members // J. Mech. Phys. Solids, 1972, Vol. 20, №2.
72. Wagner H. Verdrehung und Knickung von offenen Profilen. // Festschrift 25 Jahre T. H. Danzig,. – Danzig: Verlag A. W. Kefermann, 1929 – P. 329–344.
73. Weber C. Übertragung des Drehmomentes in Balken mit doppelflanschigem Querschnitt // Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Mechanik, 1926, vol. 6, № 2 – P. 85–97.
74. Zimmermann, H. Die Knickfestigkeit vollwandiger Stäbe in neuer einheitlicher Darstellung // Zentralblatt der Bauverwaltung, 1922, vol. 42, – P. 34–39.

О моделировании тонких упругих оболочек методом граничного элемента

Аннотация: При рассмотрении упругих оболочек часто вводятся гипотезы и упрощения, уравнения теории упругости выполняются приближенно [2],[1],[3],[4]. В данной работе предложена формулировка лишняя этого недостатка, используется единственное представление решения уравнений Ламе комбинацией упругих потенциалов простого и двойного слоя для континуального односвязного упругого тела с гладкой границей постоянной ширины.¹

Выражения метода граничного элемента

В этом параграфе приведены используемые ниже выражения перемещений, напряжений и граничных усилий Метода граничного элемента для континуального упругого тела [5], [7]. (Сингулярные интегралы не выделяются, так как в другом смысле они не существуют.)

Если упругое тело занимает односвязную трехмерную область Θ с гладкой границей S , то для удовлетворяющей уравнениям Ламе функции перемещений

$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ в точке $p = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, справедлива формула Сомилианы [5, с.551], [7, с.31]:

$$\xi u_i(p) = \int_S V_{ik}(p, q) F_k(q) dS_q - \int_S T_{ik}(p, q) u_k(q) dS_q, \quad (1)$$

где $\xi = \begin{cases} 2, & \text{если } p \in \Theta \setminus S \\ 0, & \text{если } p \notin \Theta \cup S \end{cases}$, $q = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$,

$$V_{ik}(p, q) = \frac{1}{2\pi\mu(\varpi + 1)} \left[\frac{\varpi}{r} \delta_{ik} + \frac{a_i a_k}{r^3} \right],$$

$$a_i = x_i - y_i, \quad i = 1..3, \quad r = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \quad \varpi = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu},$$

λ, μ – константы Ламе,

$$T_{ik} = \left(\tilde{m} \delta_{ik} + \tilde{n} \frac{a_i a_k}{r^2} \right) \frac{a_m n_m}{r^3} - \frac{1}{r^3} \tilde{m} (n_k a_i - n_i a_k),$$

n – вектор нормали, δ – символ Кронекера, $\tilde{m} = \frac{\mu}{2\pi(\lambda + 2\mu)}$, $\tilde{n} = \frac{3(\lambda + \mu)}{2\pi(\lambda + 2\mu)}$, по повторяющимся индексам производится суммирование,

$$F = T_n(u),$$

F – граничные усилия, T_n – оператор усилий на площадке с нормалью n ,

$$\left(T_n(u) \right)_i = \sigma_{ij}(u) n_j, \quad (2)$$

¹ Говоря о постоянной ширине мы имеем ввиду наличие скруглений по "периметру". "Ширина" континуальной трехмерной области соответствует "толщине" оболочки.

σ – матрица напряжений,

$$\sigma_{ij}(u) = c_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}, \quad (3)$$

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) .$$

Выражения $U(\varphi)$, $W(\varphi)$ принято называть упругими потенциалами Кельвина-Соммилианы плотности φ простого и двойного слоя соответственно:

$$U(\varphi) = \int_S V_{ik}(p, q) \varphi_k(q) dS_q ,$$

$$W(\varphi) = \int_S T_{ik}(p, q) \varphi_k(q) dS_q .$$

Каждый потенциал состоит из трех компонент, соответствующих трем осям декартовых координат и удовлетворяет уравнениям Ламе.

У потенциала $W(\varphi)$ и оператора усилий от потенциала $U(\varphi)$ следующие предельные значения при стремлении из области Θ к границе S (индекс плюс) и при стремлении к границе S из области, дополняющей Θ до всего пространства, (индекс минус) [5, с.553–554]:

$$W(\varphi)^\pm = \mp \varphi + W(\varphi) , \quad (4)$$

$$\left[T_n \left(U(\varphi) \right) \right]^\pm = \pm \varphi + T_n \left(U(\varphi) \right) . \quad (5)$$

Потенциал U и оператор усилий от W непрерывны на границе S .²

Используя указанные предельные свойства, устремим точку p в (1) к границе S , получим выражение (1), в котором $\xi = 1$.

Применив оператор (3) к выражению (1) в точке $p \in \Theta \setminus S$ получим выражение для напряжений

$$2\sigma_{ij}(p) = \int_S D_{ijk}(p, q) F_k(q) dS_q - \int_S \Upsilon_{ijk}(p, q) u_k(q) dS_q , \quad (6)$$

где

$$D_{ijk}(p, q) = c_{ijlm} \frac{\partial}{\partial x_m} V_{lk}(p, q) , \quad \Upsilon_{ijk}(p, q) = c_{ijlm} \frac{\partial}{\partial x_m} T_{lk}(p, q) ,$$

Ядро Υ гиперсингулярно. Это ядро соответствует оператору напряжений от выражения обобщенной теоремы Гаусса теории упругости [5, с.552], включающему дифференцирование, если перемещения постоянны в Θ , он равен нулю в $\hat{p} \in \Theta \setminus S$. Значит

$$\int_S \Upsilon_{ijk}(p, q) u_k(q) dS_q = \int_S \Upsilon_{ijk}(p, q) \left(u_k(q) - u_k(\hat{p}) \right) dS_q , \quad p \in \Theta \setminus S . \quad (7)$$

Правая часть последнего равенства имеет предельное значение в точке $\hat{p} \in S$, при учете, что u удовлетворяет уравнениям Ламе в некоторой области, включающей Θ .

По выражению (6) с помощью (2) получим выражение для усилий в точке $p \in \Theta \setminus S$ на площадке с нормалью n

$$2 \left(T_n(u) \right)_i = \int_S \Psi_{ik}(p, q) F_k(q) dS_q - \int_S \Omega_{ik}(p, q) u_k dS_q , \quad (8)$$

² С учетом (7).

где Ω гиперсингулярное ядро:

$$\Psi_{ik}(p, q) = D_{ijk}(p, q)n_j = T_n(V_{ik}(p, q)) ,$$

$$\Omega_{ik}(p, q) = \Upsilon_{ijk}(p, q)n_j = T_n(T_{ik}(p, q)) .$$

Устремляя точку p к точке $\hat{p} \in S$ в (8) с учетом (7) и (5), получим выражение граничных усилий F в точке $p \equiv \hat{p}$, $p \in S$:

$$F_i(p) = \int_S \Psi_{ik}(p, q)F_k(q) dS_q - \int_S \Omega_{ik}(p, q)\left(u_k(q) - u_k(p)\right) dS_q , \quad (9)$$

где n – внешняя нормаль к S .

Тонкая упругая оболочка

Пусть упругое тело занимающее односвязную трехмерную область Θ такое, что в каждой точке его гладкой границы S можно вписать касательный в этой точке шар одного и того же диаметра h . Пусть максимальные линейные размеры Θ минимум по двум из трех декартовых осей координат много больше h . (То есть Θ представляет собой "блин толщиной h " искривленный в пространстве.)

Пусть $S = S_s \cup S_t \cup S_b$, $S \in C_1$. Где S_s поверхность скруглений. Любая точка поверхности S_s принадлежит дуге раствором π , каждая точка которой является точкой касания вписанного в Θ шара диаметра h . Каждой точке поверхности S_t соответствует точка поверхности S_b , такая что обе точки являются точками касания S одного шара диаметра h и других точек касания S у этого шара нет. (То есть поверхности S_t и S_b – две "стороны блина" без учета скруглений по его "периметру".)

Если h мал по абсолютной величине, что соответствует тонкой оболочке, то в (1) интегралами по поверхности скруглений S_s можно пренебречь, так как эти интегралы от ограниченных функций. Запишем выражение (1) для $p \notin \Theta \cup S$, пренебрегая S_s , разделим на h и устремим $h \rightarrow 0$, получим:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_{S_t \cup S_b} V_{ik}(p, q)F_k(q) dS_q - \int_{S_t \cup S_b} T_{ik}(p, q)u_k(q) dS_q \right) = 0 . \quad (10)$$

Значит

$$\begin{aligned} & \int_{S_t \cup S_b} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{V_{ik}(p, q)}{h} \lim_{h \rightarrow 0} F_k(q) dS_q - \\ & - \int_{S_t \cup S_b} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T_{ik}(p, q)}{h} \lim_{h \rightarrow 0} u_k(q) dS_q = 0 . \end{aligned}$$

Откуда следует

$$- \int_{S_b} \frac{\partial V_{ik}(p, q)}{\partial n_q} F_k(q) dS_q + \int_{S_b} \frac{\partial T_{ik}(p, q)}{\partial n_q} u_k(q) dS_q = 0 \quad (11)$$

(вектор нормали n соответствует S_b).

Обозначим замкнутую кривую ограничивающую S_b как l_b .

Покажем, что

$$\left[\int_{S_b} \frac{\partial V_{ik}(p, q)}{\partial n_q} \xi_k(q) dS_q \right]^{\pm} = \mp \frac{1}{\mu} \xi_i(p) + \int_{S_b} \frac{\partial V_{ik}(p, q)}{\partial n_q} \xi_k(q) dS_q, \quad \xi \in C_1. \quad (12)$$

◇ Рассмотрим $\frac{\partial}{\partial n_p} U(\xi)$ в местной системе координат с центром в $p \in S_b \setminus l_b$, в которой $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Первый столбец матрицы V с точностью до множителя A соответствует представлению [5, с.284, формула (5.3)], в котором: $\varphi_1 = \frac{1}{r}$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$, откуда следует [5, с.285, формула (5.5)]: $\psi = B\varphi_1$, $B = \frac{\lambda + \mu}{3\mu + \lambda}$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} V_{11}(\xi_1) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{S_b} A \left(\varphi_1 + Bx_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \right) \xi_1(q) dS_q = \\ &= \int_{S_b} A \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + B \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + Bx_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1^2} \right) \xi_1(q) dS_q. \end{aligned} \quad (13)$$

Рассмотрим предельное значение интеграла

$$\int_{S_b} \frac{\partial^2}{\partial n_p^2} \left(\frac{1}{r(p, q)} \right) \xi_1(p) dS_q. \quad (14)$$

Если $p \in \Theta \setminus S$ или $p \notin \Theta \cup S$, Θ – односвязная с границей $S = S_b \cup \widehat{S}_b$, $S \in C_1$, то:

$$\begin{aligned} &\int_{S_b} \frac{\partial^2}{\partial n_p^2} \left(\frac{1}{r(p, q)} \right) \xi_1(p) dS_q = \\ &= \int_{S_b} \left(\frac{\partial^2}{\partial n_p^2} \left(\frac{1}{r(p, q)} \right) \xi_1(q) + \frac{\partial^2}{\partial n_p \partial n_q} \left(\frac{1}{r(p, q)} \right) \xi_1(p) \right) dS_q + \\ &+ \int_{\widehat{S}_b} \frac{\partial^2}{\partial n_p \partial n_q} \left(\frac{1}{r(p, q)} \right) \xi_1(p) dS_q, \quad \xi_1 \in C_1, \end{aligned} \quad (15)$$

это следствие теоремы Гаусса [5, с.94],[6]:

$$\int_S \frac{\partial^2}{\partial n_p \partial n_q} \left(\frac{1}{r(p, q)} \right) dS_q = 0, \quad p \notin S. \quad (16)$$

Предельное значение от (15) на границе S существует, причем (15) имеет одинаковые предельные значения с обеих "сторон" S . Значит в принятой системе координат интеграл

$$\int_{S_b} x_1 \frac{\partial^2}{\partial n_p^2} \left(\frac{1}{r(p, q)} \right) \xi_1(q) dS_q, \quad \xi_1 \in C_1,$$

соответствующий третьему слагаемому последнего интеграла (13), также имеет одинаковые предельные значения с обеих "сторон" S_b .³ Скачек значений (13) в $p \in S_b \setminus l_b$ определяется предельными значениями первых двух слагаемых последнего интеграла (13), которые в свою очередь определяются [5, с.95, формула (6.31)], [6].⁴ Нормальная производная от элементов матрицы V_{12}, V_{13} при $\xi \in C_1$ непрерывна в $p \in S_b \setminus l_b$,⁵ остальные элементы этой матрицы в выражении $\frac{\partial U}{\partial n_p}$ умножаются на нулевые компоненты нормали. Подставляя значение нормирующего множителя $A = \frac{\varpi}{2\pi\mu(\varpi + 1)}$ в (13), с учетом непрерывности в $p \in S_b \setminus l_b$ суммы

$$\frac{\partial}{\partial n_p} U(\xi) + \frac{\partial}{\partial n_q} U(\xi)$$

в силу чего каждое из слагаемых имеет равный по модулю и противоположный по знаку скачек значений в p , получаем (12). \diamond

Пусть в (11) точка $p \notin \Theta \cup S$ стремится к S_b противоположно вектору нормали, с учетом (12) получим

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\mu} F_i(p) - \int_{S_b} \frac{\partial V_{ik}(p, q)}{\partial n_q} F_k(q) dS_q + \\ & + \int_{S_b} \left(\frac{\partial T_{ik}(p, q)}{\partial n_q} u_k(q) + \frac{\partial T_{ik}(p, q)}{\partial n_p} u_k(p) \right) dS_q + \\ & + \int_{\widehat{S}_b} \frac{\partial T_{ik}(p, q)}{\partial n_p} u_k(p) dS_q = 0, \quad p \in S_b, \end{aligned} \quad (17)$$

где \widehat{S}_b такая, что объединение $S_b \cup \widehat{S}_b$ является границей некоторой односвязной области с тем же что у S_b направлением внешней нормали.

При получении предельного выражения (17) учтено, что интеграл от суммы

$$\frac{\partial T_{ik}(p, q)}{\partial n_q} u_k(q) + \frac{\partial T_{ik}(p, q)}{\partial n_p} u_k(p)$$

в $p \in S_b \setminus l_b$ существует как сингулярный, следовательно предельное значение также существует⁶, и то что

$$\int_{S_b \cup \widehat{S}_b} \frac{\partial T_{ik}(p, q)}{\partial n_p} dS_q = 0,$$

³ В рассматриваемой системе координат, если интеграл $\int_{S^*} D dS^*$, где S^* – часть $S_b \in C_1$ внутри сферы малого радиуса с центром в $p \in S_b \setminus l_b$, имеет одинаковые предельные значения в p с обеих "сторон" S^* , то интеграл $\int_{S^*} x_1 D dS^*$ имеет равные нулю предельные значения в p с обеих "сторон" S^* , так как при уменьшении радиуса сферы множитель x_1 можно вынести за знак интеграла: $x_1 \int_{S^*} D dS^*$, и $x_1 = 0$ в p . Интеграл по $S_b \setminus S^*$ – аналитическая в p функция.

⁴ Нам достаточно знания величины скачка, предельные значения (13) при стремлении к $p \in S_b \setminus l_b$ с двух "сторон" S_b мы можем не знать.

⁵ Соответствующие интегралы по части S_b внутри сферы малого радиуса с центром в $p \in S_b \setminus l_b$ равны нулю за счет симметрии.

⁶ Если представить компоненты u разложением Тейлора, первый член разложения, равный константе, сокращается из-за разности, интеграл от второго члена, соответствующего производной, существует как сингулярный: если отделить от S_b часть внутри сферы малого радиуса с центром в p , то интегральная сумма по ней от второго члена конечна из-за свойств симметрии.

если p лежит внутри или вне односвязной области с границей $S_b \cup \widehat{S}_b$, исключая саму границу, это следствие обобщенной теоремы Гаусса.⁷

При поиске значений F по значениям u на $S_b \setminus l_b$ выражение (17) соответствует уравнению Фредгольма второго рода, является корректно поставленной задачей, имеющей единственное решение.⁸

При поиске значений u по заданным значениям F на основе (17) задача имеет бесконечное множество решений, так как если какая либо u удовлетворяет правой части, то $u + c$, c – константа, так же будет ей удовлетворять.

◇ Зададим потенциал простого слоя $U(\Phi)$, равный u в области Θ с границей $S = S_s \cup S_t \cup S_b$. Это представление единственно [5], [7].⁹ Так как оболочка тонкая, интегралами по S_s пренебрежем. В соответствии с (5) предельные значения оператора усилий $T_{n_b}(U(\Phi))$ по направлению нормали n_b поверхности S_b при стремлении от срединной поверхности к поверхностям S_t и S_b соответственно:

$$\begin{aligned} -\Phi_{S_t} + T_{n_b}(U_{S_b}(\Phi_{S_b})) + T_{n_b}(U_{S_t}(\Phi_{S_t})) , \\ \Phi_{S_b} + T_{n_b}(U_{S_b}(\Phi_{S_b})) + T_{n_b}(U_{S_t}(\Phi_{S_t})) , \end{aligned} \quad (18)$$

где Φ_{S_t} , Φ_{S_b} значения Φ на S_t и S_b .

При $h \rightarrow 0$ функции плотности Φ_{S_t} и Φ_{S_b} стремятся к общему пределу Φ_0 , так как значения потенциала стремятся к значениям u на срединной поверхности. Следовательно, в результате предельного перехода $h \rightarrow 0$ из (18) с учетом (5) получим:

$$-\Phi_{S_t} + T_{n_b}(U_{S_b}(\Phi_{S_b})) + \Phi_{S_b} + T_{n_b}(U_{S_t}(\Phi_{S_t})) =$$

⁷ В численном алгоритме нет необходимости рассматривать интеграл по \widehat{S}_b в (17). При вычислении второго интеграла в (17) нужно выделить область внутри сферы малого радиуса с центром в рассматриваемой сингулярной точке $p \in S_b \setminus l_b$. Интеграл по части S_b вне сферы существует в обычном смысле. Интегралы от членов представления функции плотности u разложением Тейлора внутри сферы существуют в обычном смысле для членов разложения, начиная с третьего. Для второго члена, соответствующего производной, интеграл существует как сингулярный, то есть он не дает вклада в интегральную сумму от части границы внутри сферы за счет симметрии. Вычислению интеграла от первого члена посвящен следующий абзац.

Если рассмотреть односвязную область с границей, состоящей из объединения $S_b \cup \widehat{S}_b$, из которого исключена область внутри сферы, а вместо нее "добавлена" половина сферы внутри Θ , то интеграл по такой границе с ядром $\frac{\partial T_{ik}(p, q)}{\partial n_p}$ и постоянной плотностью будет равен нулю, это следствие обобщенной теоремы Гаусса. Значит интеграл от плотности–константа по части границы вне сферы равен интегралу по половине сферы с обратным знаком, его и нужно вычислять.

Иными словами: В численном алгоритме последний интеграл в (17) и второе слагаемое под знаком второго интеграла равны интегралу с обратным знаком по полусфере малого радиуса внутри Θ с центром в p с плотностью–константа, равной $u(p)$. При вычислении интеграла от первого слагаемого под знаком второго интеграла, нужно "пропустить" вычисление интеграла по части S_b внутри сферы от первого и второго членов представления $u(p)$ разложением Тейлора.

⁸ Единственность решения следует из того, что u и F соответствуют решению уравнений Ламе, – напряжения и усилия по упругому полю перемещений определяются единственным образом.

⁹ Единичному источнику, единичной силе приложенной к бесконечному упругому пространству, соответствует ядро $\frac{1}{2}V_{ik}$. Множитель 2 был введен для упрощения выражений. Приравняв $u = U(\Phi)$, мы получили "половинную" плотность Φ , в последующих равенствах "половинная" плотность умножается на удвоенное ядро.

$$\begin{aligned}
&= T_{n_b} \left(U_{S_t \cup S_b}(\Phi_0) \right) = T_{n_b} \left(U_{S_b}(2\Phi_0) \right) , \\
\Phi_{S_b} + T_{n_b} \left(U_{S_b}(\Phi_{S_b}) \right) - \Phi_{S_t} + T_{n_b} \left(U_{S_t}(\Phi_{S_t}) \right) &= \\
&= T_{n_b} \left(U_{S_t \cup S_b}(\Phi_0) \right) = T_{n_b} \left(U_{S_b}(2\Phi_0) \right). \tag{19}
\end{aligned}$$

Равенства (19) отражают тот факт, что на бесконечно тонкой оболочке модуль оператора усилий одинаков на обеих "сторонах" .

Предельные значения оператора усилий от потенциала $U_{S_b}(2\Phi_0)$ на S_b (5):

$$\pm 2\Phi_0 + T_{n_b} \left(U_{S_b}(2\Phi_0) \right) , \tag{20}$$

где верхний знак соответствует стремлению к S_b по направлению n_b , нижний знак – стремлению противоположно n_b . Разницы предельных значений оператора усилий (20) равны силам $4\Phi_0$, приложенным на S_b к упругому телу, занимающему все пространство, в результате чего в теле появляются перемещения $U_{S_b}(2\Phi_0)$, совпадающие с перемещениями бесконечно тонкой упругой оболочки на поверхности S_b , которым соответствуют приложенные к оболочке силы: $2T_{n_b} \left(U_{S_b}(2\Phi_0) \right) = 2F$ (19).¹⁰

Рассмотрим систему объединяющую бесконечно тонкую упругую оболочку и упругое тело, занимающее все пространство. Пусть как и ранее в теле на S_b заданы силы $4\Phi_0$, а к упругой оболочке приложим вместо сил $2F$ силы с обратным знаком $-2F$. В соответствии с изложенным такая система будет иметь нулевые перемещения. Следовательно, приложенные к системе силы равны нулю. Значит $4\Phi_0 = 2F$. Следовательно, (с точностью до жесткого смещения) перемещения u , удовлетворяющие (17):

$$u_i(p) = 2 \int_{S_b} V_{ik}(p, q) \Phi_{0k}(q) dS_q = \int_{S_b} V_{ik}(p, q) F_k(q) dS_q . \quad \diamond \tag{21}$$

Выражение (17) соответствует предельному случаю бесконечно тонкой оболочки. Так как оболочка бесконечно тонкая, то значения перемещений u удовлетворяющих уравнениям Ламе в некоторой области включающей S_b одинаковы с обеих "сторон" оболочки, а значения оператора усилий F на "сторонах" оболочки одинаковы по модулю и противоположны по знаку. При решении задачи в целом для определения перемещений и граничных усилий (17) достаточно, но для определения действующих внутри оболочки напряжений и локального распределения перемещений необходимо вернуться к рассмотрению оболочки конечной ширины h (Fig.1)¹¹.

Обозначим S_b в (17) как S_v , чтобы как и раньше использовать обозначения S_t, S_b для двух поверхностей "блина" без учета скруглений S_s (Fig.1). Пусть поверхность \widehat{S}_v такая, что $S_v \cup \widehat{S}_v$ – гладкая граница односвязной области, тогда для точек внутри этой области перемещения могут быть выражены через граничные значения перемещений и усилий (1) заданных на $S_v \cup \widehat{S}_v$. После решения (17) мы знаем перемещения и усилия на S_v , не знаем на \widehat{S}_v и нас интересуют величины вблизи S_v . Оценим насколько велик вклад

¹⁰ Величины сил $2F$ равны разностям предельных значений оператора усилий на двух "сторонах" оболочки, они равны по модулю F и противоположны по знаку.

¹¹ Отрезки $[AB]$ и $[CD]$ можно заменить дугами, соответствующими S_s

в значения перемещений вблизи S_v от интегралов содержащих перемещения и усилия на \widehat{S}_v . Потенциалы простого U и двойного слоя W убывают при удалении от поверхности источников как C_1/r и C_2/r^2 соответственно, C_1, C_2 – константы, r – расстояние. Следовательно вклад потенциалов U, W заданных на \widehat{S}_v в отличие значений (1) на удалении $\pm h/2$ по направлению нормали к $S_v \setminus l_v$ (l_v – замкнутая кривая ограничивающая S_v) от значений в точке задания этой нормали соответственно:

$$O\left(\frac{C_1 h}{2r^3}\right), \quad O\left(\frac{C_2 h}{2r^4}\right), \quad (22)$$

где r – расстояние от ближайшей точки \widehat{S}_v . В точках на $S_v \setminus l_v$, за исключением ближайших "к краю", – к линии l_v , этими величинами можно пренебречь. При вычислении производных от перемещений, и следовательно напряжений и усилий, интегралами по \widehat{S}_v в этих точках можно пренебречь.

Так как наибольшие ошибки вычислений вблизи линии границы l_v поверхности S_v , в численной схеме целесообразно фиктивно продолжить поверхность S_v , задав на продолжении разумные величины перемещений или усилий, а напряжения и перемещения по ширине h вычислять вблизи исходной S_v .

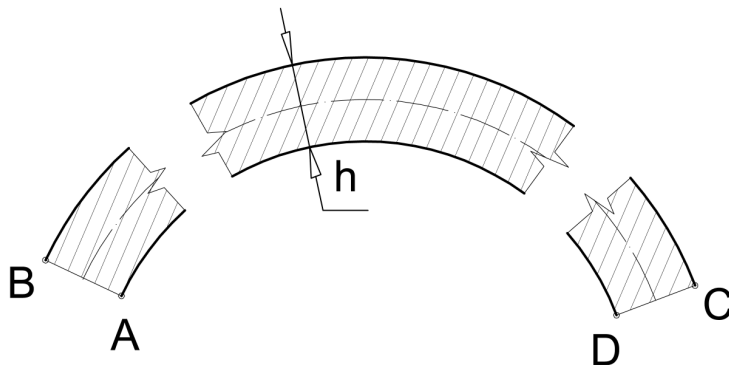


Рис. 1 – Сечение $ABCD$ тонкой упругой оболочки шириной h .
Линия BC соответствует поверхности S_t , линия AD – поверхности S_b .

Предлагается аппроксимация упругой оболочки:

В качестве функций плотности потенциалов двойного и простого слоя заданных на срединной поверхности S_v , найденные из (17) или (21) значения u и F задают поле перемещений (1) (где $\xi = 2$ вне срединной поверхности), а интегралы по \widehat{S}_v заменены их известными величинами на S_v , пренебрегая их изменением по ширине h . Нормаль n должна соответствовать внешней нормали в верхней и нижней "половинах" оболочки. Сумма "половин" задает перемещения во всей оболочке (сечение $ABCD$ (Fig.1)). Соответствующие этому полю напряжения: (6) и усилия: (8), где интегралами по \widehat{S}_v пренебрегаем.

В предложенной аппроксимации перемещения удовлетворяют уравнениям Ламе с погрешностью (22), а напряжения и усилия точно соответствуют решению уравнений Ламе, так как операторы напряжений и усилий соответствуют упругим потенциалам двойного и простого слоя заданным на S_v . Следовательно граничные усилия на поверхности оболочки (или любой ее части) уравновешены. При уменьшении ширины h эти граничные усилия и перемещения стремятся к значениям на срединной поверхности S_v , точно соответствующим решению уравнений Ламе. Задача численного моделирования тонкой упругой оболочки ширины h решена.

Заключение

Предлагаемый алгоритм моделирования тонкой упругой оболочки позволяет получить эффективную численную схему вычисления напряжений и усилий по заданным перемещениям, что соответствует численному решению уравнения Фредгольма второго рода.

Нахождение перемещений и напряжений по заданным усилиям не требует решения уравнений, так как перемещения от усилий на срединной поверхности оболочки находятся вычислением упругого потенциала простого слоя.

Список литературы

1. Власов В.З. Избранные труды. В трех томах: Том I.—М: Изд-во академии наук СССР, 1962. Том II.—М: Изд-во академии наук СССР, 1963. Том III.—М: Наука, 1964.
2. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. —М: Наука, 1976.
3. Еремеев В.А., Зубов Л.М. Механика упругих оболочек. —М: Наука, 2008. ISBN 978-5-02-034102-9
4. Кильчевский Н.А. Основы аналитической механики оболочек.—Киев: Издательство АН УССР, 1963.
5. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. —М.: Наука, 1981.
6. Сретенский Л.Н. Теория ньютоновского потенциала. —М.Л.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1946.
7. Угодчиков А.Г., Хуторянский Н.М. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. —Казань: Изд-во Казанского университета, 1986.

Оценка повреждений сирийских архитектурных памятников, полученных в результате землетрясений и военных действий

Аннотация: В данном докладе рассматривается анализ и систематизация наиболее характерных поврежденных сирийских архитектурных памятников, полученных в результате военных действий, произошедших с начала в 2011 года и с учётом землетрясений.

На территории Сирии находится большое количество памятников архитектуры, построенных при различных государствах и цивилизациях [4]. Многие из этих памятников сохранились и дошли до наших дней. Однако территория Сирии находится в активной сейсмической зоне [6], [8], [11]. и это приводило и приводит не только к серьезным их повреждениям, но и в некоторых случаях полностью к их разрушению. Ситуация осложняется также и тем, что ведутся военные действия на территории Сирии. Совместное воздействие двух негативных факторов может явиться причиной полного исчезновения памятников всемирного наследия. В докладе представлен анализ состояния некоторых наиболее известных памятников, пострадавших в результате землетрясений и военных действий, представлены наиболее характерные повреждения, дана систематизация полученных повреждений на примере объектов средневековья, некоторых памятников арабского мусульманского зодчества.

Среди наиболее крупных памятников, пострадавших во время прошлых землетрясений и боевых действий, является замок Крак де Шевалье (рис.1,а,1,б). Его архитектура, относящаяся к эпохе крестоносцев, является образцом средневековой фортификационной военной архитектуры. Замок был построен в 1031 году. План замка имеет эллиптическую форму с двумя стенами в виде концентрических эллипсов. Вокруг замка была построена массивная стена высотой около 24 м., ширина утолщения у основания до 30 м., а сверху до 10 м. с дозорными, сторожевыми башнями. За внешней стеной имеется двор, через который можно было войти во внутренние помещения: в часовню, зал и хранилище протяженностью 120 метров, а также в склады [5]. С конца XII до начала XIII вв. в результате землетрясений были повреждены многие перечисленные постройки этого замка, и их пришлось снова восстанавливать. Например, была построена новая круглая башня высотой около 24 м. и толщиной стены 8–10 м., на юге замка, на месте прямоугольной башни, которая разрушилась в результате землетрясения в 1170 г. Наиболее существенные перестройки были сделаны после сильного землетрясения в 1202 году. До начала военных действий замок сохранял свой исторический облик [11]. В 2014 г. во время боевых действий в Сирии в замке Крак де Шевалье произошли разрушения строительных конструкций: частичные повреждения в передней части и на фасаде Рыцарского зала (рисунки 1,в, 1,г), некоторые повреждения в арках и украшениях внутри Рыцарского зала в большой галерее (рисунки 1,д, 1 е), повреждения и разрушения некоторых каменных стен в нескольких местах замка, а также небольшие повреждения с внешней стороны стены замка с множеством микротрещин [9], [10].

Одним из наиболее ярких памятников Исламского зодчества является Великая мечеть Омейядов в г. Алеппо (рисунок 2,а). Она была построена в г. Алеппо (Халебе) около 715 года. Ее почти 50-метровый минарет появился в 1094–1095 гг., автором проекта был зодчий Хасан Ибн Мукри ал-Сармани. План Великой мечети представлен в виде квадратной формы. Мечеть построена вокруг огромного двора, который соединяет различные части



Рис. 1 – Повреждения строительных конструкций в замке Крак де Шевалье в Сирии в результате военных действий:

- а – общий вид замка до войны; б – фасад рыцарского зала до войны; в – фасад рыцарского зала после войны; г – двор перед рыцарским залом после войны; д – Большая галерея до войны; е – Большая галерея после войны.

галереи и минарет мечети. Во дворе имеются колонна и два фонтана для омовения верующих перед намазом. Все несущие конструкции мечети выполнены из каменной кладки. Основная галерея состоит из колонн квадратного и прямоугольного сечения размерами 3,5x0,8x0,8 и 3,5x0,8x0,6, стена разрезана проёмами шириной около 3 м., высотой около 6 м. Мечеть пострадала в 1169 году от большого пожара в результате землетрясения, после этого ее восстановили и расширили при сельджуках. Во время военных действий, мечеть вторично получила серьёзные повреждения строительных конструкции, вызванные пожаром и обстрелами. Был разрушен минарет (рисунок 2,б), причинен большой ущерб каменным конструкциям и галереям мечети, где образовались микротрещины и откололись части камней, характерные повреждения показаны на (рисунки 2.в, 2.г). В результате взрыва в конце 2013 года была разрушена южная стена мечети [1], [3], [8], [10].

В другом культовом объекте Исламского зодчества в Большой мечети г. Маарат аль-Нуман (рисунок 3.а), которая была построена на месте древнего храма, возможно римского. План мечети имеет прямоугольную форму. Мечеть построена вокруг двора, который соединяет различные части и минарет мечети.

В центральном дворе имеется два куполообразных павильона, которые стоят на древних колоннах. В 1170 году после сильного землетрясения, образовались серьёзные повреждения купольных покрытий павильонов, находящихся во дворе мечети и несущих колонн, на которые они опирались. Кроме того пострадал квадратный минарет, имеющий размеры 30 м. в высоту и в плане 2,5x2,5 м., выполненный из каменной кладки местного

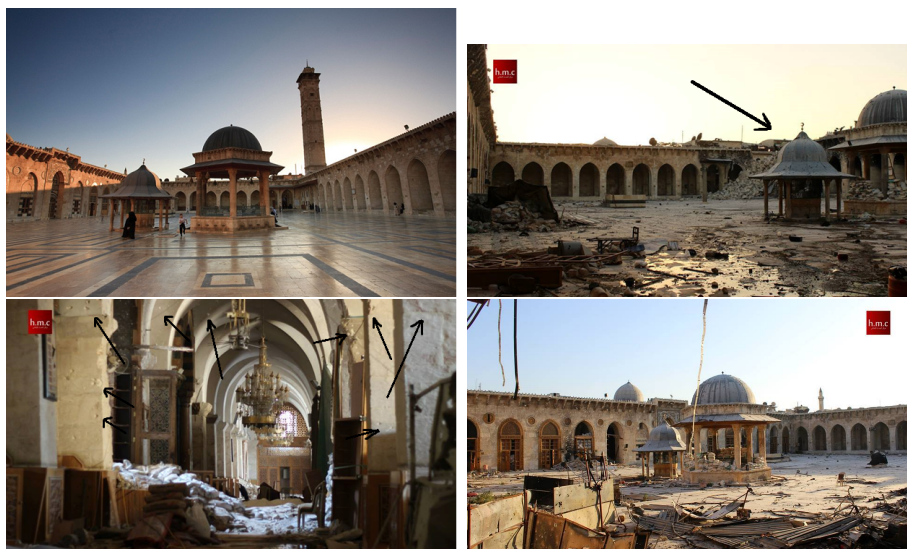


Рис. 2 – Повреждения строительных конструкций в Великой мечети Омейядов в г. Алеппо в Сирии в результате военных действий:

а – общий вид и двор мечети до войны; б – общий вид и двор мечети после войны (стрелкой показано место разрушенного минарета); в – галерея после войны (стрелками показаны повреждения конструкции); г – двор мечети после войны (другой ракурс)

материала. Минарет был восстановлен после прошедшего землетрясения. В ноябре 2015 г. в результате боевых действий имели место повреждения строительных конструкций, а именно, корпуса минарета, где образовались выколы размером от 30 до 50 см. (рисунок 3.б,3.в) и его крыши (рисунок 3.г), образовались микротрещины, откололись и разрушились части каменной кладки [1], [3], [8], [9], [10].

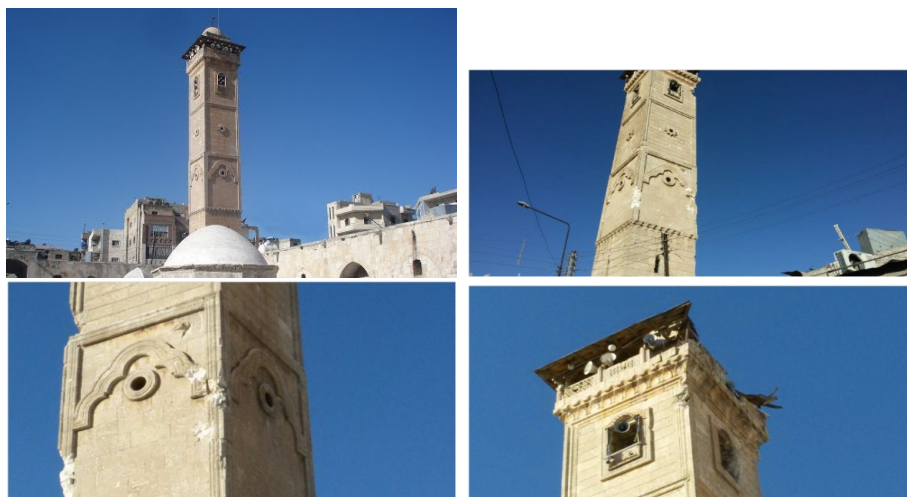


Рис. 3 – Повреждения строительных конструкций минарета в Большой мечети г. Маарат аль-Нуман в Сирии в результате военных действий:

а – общий вид мечети со стороны двора до войны; б – Минарет мечети после войны (видны разрушения на корпусе); в – Минарет мечети (крупным планом) после войны (видны разрушения на корпусе); г – разрушения на крыше минарета мечети после войны.

Архитектурный памятник Мечеть Омара в городе Босра (рисунок 4.а) в Сирии является примером архитектуры раннего ислама. Она находится в 140 километрах к югу

от Дамаска. Мечеть состоит из открытого двора размером 16 x 13 м, в его середине находится квадратное место для омовения верующих размером 2 x 2 м, внутри которого имеется фонтан, окруженный колонной из мрамора диаметром 50 см, высотой 2 м с дорической капителью. Вокруг двора существуют четыре портика. Южный портик шириной 12 м предназначен для совершения молитвы. Мечеть уже реконструировалась в разные эпохи. В результате чего внутри она имеет многочисленные колонны круглого сечения с капителями различных ордеров. Основные размеры некоторых колонн составляет около 4 м в высоту и 0,5 м в диаметре

В северо-восточном углу располагается минарет высотой 24 м с основанием 4,80 x 4,80 м. Серьёзно эти конструкции пострадали в начале 19-го века после сильных землетрясений и имели дефекты конструкции различной степени повреждения. Ситуация существенно усугубилась после военных действий 2014 года. Имели место повреждения покрытий, вся поверхность колонн и арок портиков повреждена осколками снарядов в виде отколовшихся частей. Имелись микротрещины в каменных конструкциях толщиной 2–3 мм (рисунок 4.б). На фасаде мечети образовалась большая пробоина (рисунки 4.в, 4.г). На северной стене и минарете также имелись многочисленные повреждения каменной кладки 50% стен покрыты трещинами [1], [3], [9], [10].



Рис. 4 – Повреждения строительных конструкций в Мечети Омара в г. Босра в Сирии:
 а – внутренний двор мечети до войны; б – разрушения во внутреннем дворе мечети в результате войны;
 в – разрушения на фасаде мечети; г – разрушения на фасаде мечети (крупным планом);
 д – минарет мечети до войны; е – повреждения на северной стороне стены и минарета

Анализ рассмотренных повреждений позволяет их определенным образом систематизировать. Основными повреждениями в несущих каменных стенах являются следующие характерные повреждения:

- косые и крестообразные трещины в простенках и глухих стенах, толщиной 3–5 мм длиной до 30 см;
- вертикальные трещины в местах сопряжения продольных и поперечных стен и даже выпадение стен наружу, толщиной 3–5 мм, длиной до 25 мм;
- горизонтальные трещины в стенах, чаще в уровне низа оконных проемов, перемычек или на уровне опирания перекрытий, толщиной 3–5 мм, длиной до 20 см;

- трещины в местах заделки перемычек которые достигали размеров до 30 см в длину и 5 мм в толщине и охватывают от 30% до 50% поверхностей несущих конструкций; выколы, которые имелись в каменных конструкциях. Размеры выколов колеблются от 10 до 50 см;
- трещины хаотического направления в стенах различных размеров.

К числу других повреждений зданий с несущими каменными стенами относятся сдвиг перемычек или их повреждения, а также повреждения антисейсмических поясов и сдвиг поясов относительно кладки при отсутствии достаточной связи между ними.

Оценка повреждений рассматриваемых объектов свидетельствует о повреждениях гибких отдельно стоящих стоек, а также башенных конструкций и минаретов[7],[10].

Анализ повреждений полученных в результате землетрясений и военных действий свидетельствует, что нанесённый урон огромен и в ряде случаев невосполним и что это восстановление памятников архитектуры потребует существенных экономических затрат. Поэтому поиск путей восстановления имеет большое значение не только для Сирии, но и для всего мирового сообщества. Влияние полученных в ходе военных действий повреждений памятников архитектуры Сирии и разработка мероприятий по повышению их сейсмостойкости является следующим этапом исследования с учётом особенностей сейсмических воздействий характерных для территории Сирии.

Список литературы

1. Баранов Н.В. и Др. Всеобщая история архитектуры. В 12 томах. М.: Стройиздат, 1970. Т. 1. – 510 с.
2. Баранов Н.В. и Др. Всеобщая история архитектуры. В 12 томах. М.: Стройиздат, 1971. Т. 2. – 709 с.
3. Баранов Н.В. и Др. Всеобщая история архитектуры. В 12 томах. М.: Стройиздат, 1971. Т. 8. – 489 с.
4. Брук С.И. Население мира этнодемографический справочник. Академия наук СССР. Институт этнографии им. Н.Н. Миклухо-Маклая. М.: Изд-во Наука, 1981. – 880 с.
5. Огюст Шуази. История архитектуры. В двух томах / общая редакция Ю.К. Милова, А.А. Сидорова. Издательство Всесоюзной академии архитектуры, 1937. Т.2. – 692 с.
6. Омар Х.М., Татевосян Р.Э., Ребецкий Ю.Л. Механизмы землетрясений и напряженное состояние земной коры в Сирии // Вестник КРАУНЦ. Науки о Земле. 2012. – вып. № 20. С. 139 – 148.
7. Саркисов, Д. Ю. Сейсмостойкость зданий и сооружений. Курс лекций : учебное пособие для студентов специальности 271101 "Строительство уникальных зданий и сооружений" / Д. Ю. Саркисов ; ФГБОУ ВО "Том. гос. архитектур.-строит. ун-т". – Томск : ТГАСУ, 2015. – 156 с.
8. Трифонов В.Г. и др. Неотектоника, современная геодинамика и сейсмическая опасность Сирии. М.: ГЕОС, 2012. – 216 с. + 12 с. цв. вклейки + 4 печ. л. цв. вкладок; ил. ISBN 978-5-89118-597-5
9. [Электронный ресурс]. Режим доступа: URL: ASOR CULTURAL HERITAG INITIATIVIES: URL:<http://www.asor-syrianheritage.org> / (дата обращения: 08.07.2016).
10. [Электронный ресурс]. Режим доступа:URL: DGAM: URL: <http://www.dgam.gov.sy> (дата обращения: 21.06.2016).
11. Sbeinati M.R., Darawcheh R., Mouty M. The historical earthquakes of Syria: an analysis of large and moderate earthquakes from 1365 B.C. to 1900 A.D. // Annals of Geophysics. 2005. V. 48. № 3. P.347–435.

Белаш Т.А., д-р техн. наук, проф., ПГУПС, Санкт-Петербург, Россия
Шереметьев М.Е., магистр, ПГУПС, Санкт-Петербург, Россия

Применение динамического гасителя колебаний для повышения сейсмостойкости существующего здания в г. Южно-Сахалинске

Аннотация: В докладе рассматриваются результаты исследования о возможности применения динамического гасителя колебаний для повышения сейсмостойкости здания существующей застройки.

Последствия сильных землетрясений в России подтверждают, что землетрясения являются опасным стихийным природным явлением на земле. Разрушительные землетрясения, прошедшие на о. Сахалин, свидетельствуют о серьезной сейсмической ситуации этого региона, что существенно влияет на сейсмостойкость зданий и сооружений различного назначения. Землетрясение 1995 г., прошедшее в г. Невельском существенным образом повлияло на сейсмичность не только этого региона, но и изменило карты сейсмического районирования всех сейсмоопасных районов России. Это землетрясение привело к увеличению балльности. Недооценка сейсмической нагрузки явилась причиной многочисленных разрушений жилых зданий и привела к гибели людей. Для повышения сейсмостойкости зданий могут быть использованы различные методы, среди которых, наиболее перспективными являются нетрадиционные, позволяющие изменить динамическую схему работы здания во время землетрясения, что является важным моментом в условиях непредсказуемости силы землетрясения и его частотного характера. Среди нетрадиционных средств сейсмозащиты для повышения сейсмостойкости существующих зданий одним из возможных вариантов является применение системы сейсмогашения в виде динамического гасителя колебаний (ДГК).

В докладе рассматриваются результаты исследования о возможности применения динамического гасителя колебаний для повышения сейсмостойкости здания существующей застройки.

Выбран объект исследования – девятиэтажное эксплуатируемое здание, запроектированное по бескаркасной конструктивной системе с несущими продольными и поперечными внутренними стенами, объединенными между собой и с перекрытиями в единую пространственную систему. Построение расчетной модели производилось в программно-вычислительном комплексе SCAD. Расчеты выполнялись по спектральному методу, на сейсмическое воздействие 8 баллов. [1]

Учитывая сложные грунтовые условия г. Южно-Сахалинска, в расчетной модели были учтены 2 варианта податливости основания, отличающиеся друг от друга параметрами жесткости.

На первом этапе исследования был произведен расчет здания с учетом податливостей основания без применения системы сейсмозащиты. Полученные результаты свидетельствуют о том, что без проведения дополнительных мероприятий по снижению сейсмической нагрузки, рассматриваемое здание не является сейсмостойким.

На следующем этапе в расчетную модель здания была введена конструкция динамического гасителя колебаний.

Расчетная схема с применением ДГК показана на рисунке 1.

В исследовании варьируемыми параметрами была масса ДГК и его настройка.

Как известно, по результатам исследований прошлых лет, эффективность работы динамического гасителя колебаний достигается, если его масса составляет от 5% до 15% от массы здания. [2,3,4] В исследовании масса гасителя варьировалась 5%,10%,15%. Жесткость гасителя изменялась в широком диапазоне.

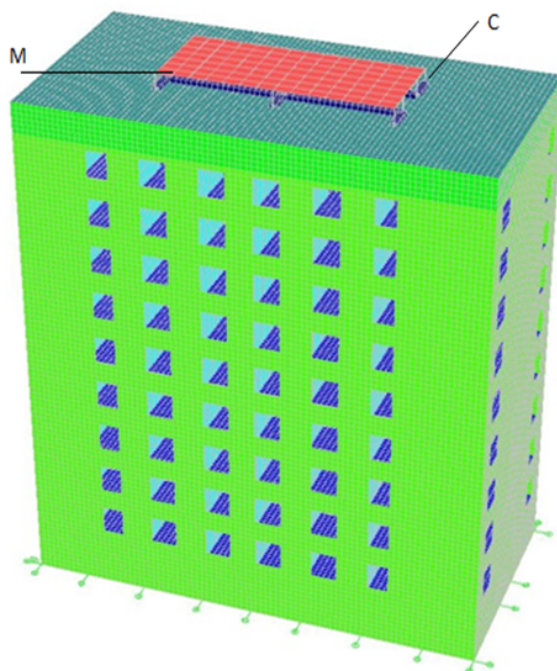


Рис. 1 – Пространственная схема здания с применением ДГК, где C – жесткость конструкции ДГК, M – масса конструкции ДГК

Разработана и реализована методика расчетно-теоретической оценки эффективности применения ДГК в системе сейсмозащиты эксплуатируемого жилого здания.

Показано, что при выборе рациональных параметров предлагаемой системы сейсмозащиты необходимо проводить полный пространственный анализ напряженно-деформированного состояния системы с учетом реального характера сейсмических воздействий и податливости основания. Введение ДГК позволяет снизить сейсмическую нагрузку существующего здания в 2 и более раз, при этом наиболее эффективная масса гасителя составляла 10% от массы здания при параметре настройки гасителя равным 0,9-0,95.

Список литературы

1. Белаш Т.А., Уздин А.М. Железнодорожные здания для районов с особыми природно-климатическими условиями и техногенными воздействиями: Учебник для вузов ж.-д. транспорта. – М.:ГОУ «Учебно-методический центр по образованию на железнодорожном транспорте», 2007. – 372 с.
2. Богданова Г.А. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. Применение динамических гасителей колебаний с демпферами сухого трения в системах сейсмозащиты эксплуатируемых зданий. СПб, 2000 г.
3. Корнев Б.Г., Резников Л.М. Динамические гасители колебаний: Теория и технические приложения. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 304 с., ил. 97.
4. Мелкумян М.Г. Опыт применения современных систем сейсмозащиты // Трагедия Спитака не должна повториться. Ереван: Воскан Ереванци, 1998. С. 193-205

Исследование сейсмостойкости цунамистойкого жилого здания на Курильских островах

Аннотация: В докладе производится исследование сейсмостойкости цунамистойкого жилого здания на Курильских островах.

Цунами — это стихийное бедствие относится к наиболее разрушительным явлениям природы. Эти гигантские волны способны стереть с лица Земли целые города. Наиболее часто (до 90%) цунами появляются вследствие сильных землетрясений, происходящих под дном моря или океана. На территории РФ наиболее цунамиопасными регионами являются районы Тихоокеанского побережья, в которых, из-за данного природного явления, существенным образом осложняется человеческая деятельность.

Большая часть разрушений, вызываемых цунами, происходят в результате удара волн. Далее из-за затопления территории происходит, размыв фундаментов зданий, мостов и дорог. В результате транспортирующего действия цунами, в волне присутствуют обломки лодок, прибрежных сооружений, машин, которые с силой ударяют в здания, нанося дополнительный урон. [1]

Для избежания материальных потерь и тем более человеческих жертв необходимо выполнять цунамизащитные мероприятия, приведенные ниже. Многие исследователи [1, 5, 6, 7] подчеркивают, что для защиты от цунами необходимо предусмотреть берегозащитные мероприятия. К таким мероприятиям можно отнести посадку деревьев вдоль берега, строительство земляного вала и строительство специальных берегозащитных сооружений типа стен, волноломов, молв и дамб. Стоит отметить, что защитные сооружения должны воздвигаться в зависимости от цунамирайонирования побережья.

Кроме берегозащитных сооружений, для обеспечения безопасности жителей цунамиопасных регионов нашей планеты, предлагается строить цунамистойкие здания. Так, ученые Воробьев Ю.Л. [1] и Злобин Т.К. [4] в своих работах приводят некоторые рекомендации по строительству зданий в цунамиопасных районах. Во-первых, здание должно быть прочным, способным выдержать большую ударную нагрузку. Во-вторых, здание рекомендуется располагать длинной стороной вдоль движения волны цунами. При таком расположении удару будет подвержена меньшая часть здания и будет обеспечена наибольшая прочность. В-третьих, фундаменты следует строить таким образом, чтобы они были неподверженными влиянию эрозии почвы и подмыву в результате действия течений. В-четвертых, первый этаж следует делать как можно более «открытым». Это делается для того, чтобы волна спокойно проходила сквозь него и не наносила сильный удар по зданию. Желательно делать первый этаж нежилым. В-пятых, ключевые элементы инфраструктуры здания (аварийные генераторы, лифтовые моторные отсеки и др.) следует располагать на не затапливаемых этажах.

Исходя из рекомендаций по цунамистойкому строительству, для максимального снижения нагрузки от движущейся волны цунами, было принято решение «оторвать» здание от поверхности земли на высоту 18 метров (максимальная за 100 лет высота волны цунами на Курильских островах). Для повышения экономического эффекта такого решения, здания расположены на автомобильной эстакаде. Таким образом, в случае обрушения волны цунами на здание, она пройдет под жилыми секциями и нагрузка от волны будет приложена только к опорам эстакады.

Жилое здание состоит из двух симметричных и связанных между собой трехэтажных блоков, размерами в осях 6х18 метров. Оно имеет жесткую каркасную конструктивную систему. Такая система принята в соответствии с рекомендациями по сейсмо- и цунами-стойкому строительству. Здание и участок эстакады имеют общие опоры – металлические трубы 630х20, выполненные по ГОСТ Р 54157-2010 [3]. Жесткость эстакады достигается использованием двутавров, выполненных по ГОСТ 26020-83 [2], №100Б2 в направлении перпендикулярном оси эстакады и №60Б2 вдоль оси эстакады. Жесткость самого здания достигается использованием квадратных труб 400х10, выполненных по ГОСТ Р 54157-2010 [3] в качестве колонн, и монолитных железобетонных перекрытий высотой 200мм.

Так как регионы с повышенной цунамиопасностью отличаются также высокой сейсмоактивностью, данное конструктивное решение было рассчитано в вычислительном комплексе SCAD 21.1 на действие девятибалльного землетрясения и волны цунами высотой 18 метров. Схема поперечного разреза всей конструкции (а) совместно с расчетной моделью (б), построенной в ВК SCAD 21.1, и схемой деформированного состояния от действия сейсмической нагрузки (в), представлены на рисунке 1.

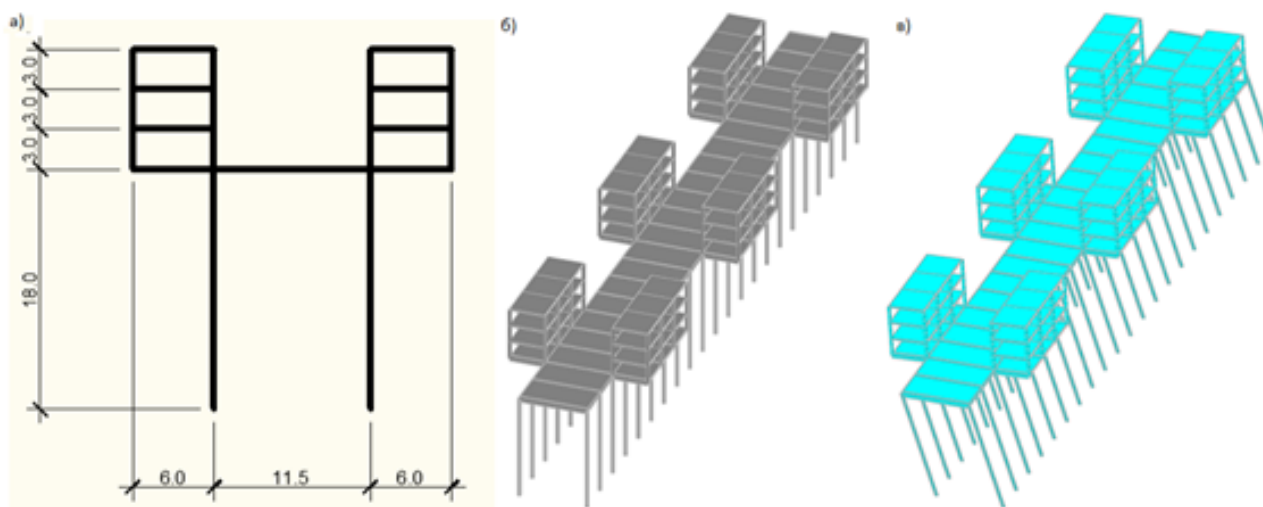


Рис. 1 – Схема поперечного разреза (а), расчетная модель (б), схема деформированного состояния (в) для первого варианта

Анализ результатов расчета данной модели показал, что максимальные перемещения составляют 389 мм и достигаются в верхней точке здания. Период колебаний здания составляет 3,2 секунды. Для поиска оптимального с точки зрения сейсмостойкости решения, было создано еще две расчетные модели. На рисунке 2 изображены схема поперечного разреза (а), расчетная модель (б) и схема деформированного состояния от действия сейсмической нагрузки (в) второго варианта.

Как видно из рисунка 2а, второй вариант отличается от первого более широким расположением опор автомобильной эстакады. Таким образом, жилые здания опираются на эстакаду по своей центральной оси, а не по консольной схеме, как в первом варианте. Анализ результатов расчета данной модели показал, что максимальные перемещения составляют 455 мм и также достигаются в верхней точке здания. Период колебаний здания составляет 3,6 секунды. Более широкое расположение опор эстакады и, следовательно, измененная схема опирания зданий на конструкции эстакады, увеличили перемещения зданий на 66 мм и увеличили период колебаний на 0,4 секунды. В последнем рассмотренном варианте здания располагаются над автомобильной эстакадой. На рисунке 3 изображены схема

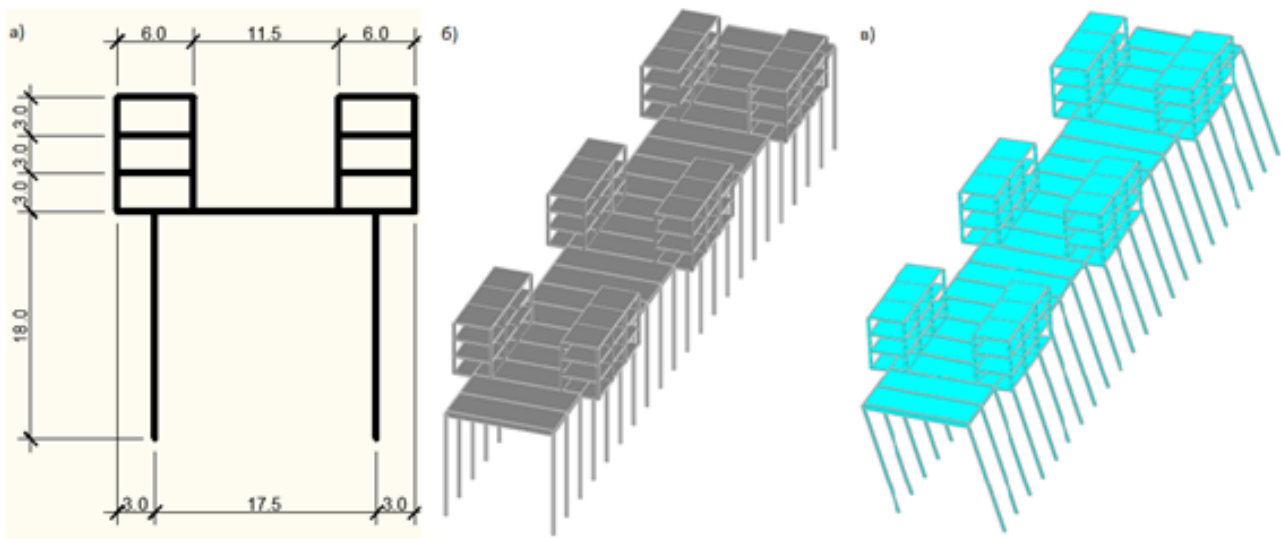


Рис. 2 – Схема поперечного разреза (а), расчетная модель (б), схема деформированного состояния (в) для второго варианта

поперечного разреза (а), расчетная модель (б) и схема деформированного состояния от действия сейсмической нагрузки (в) третьего варианта.

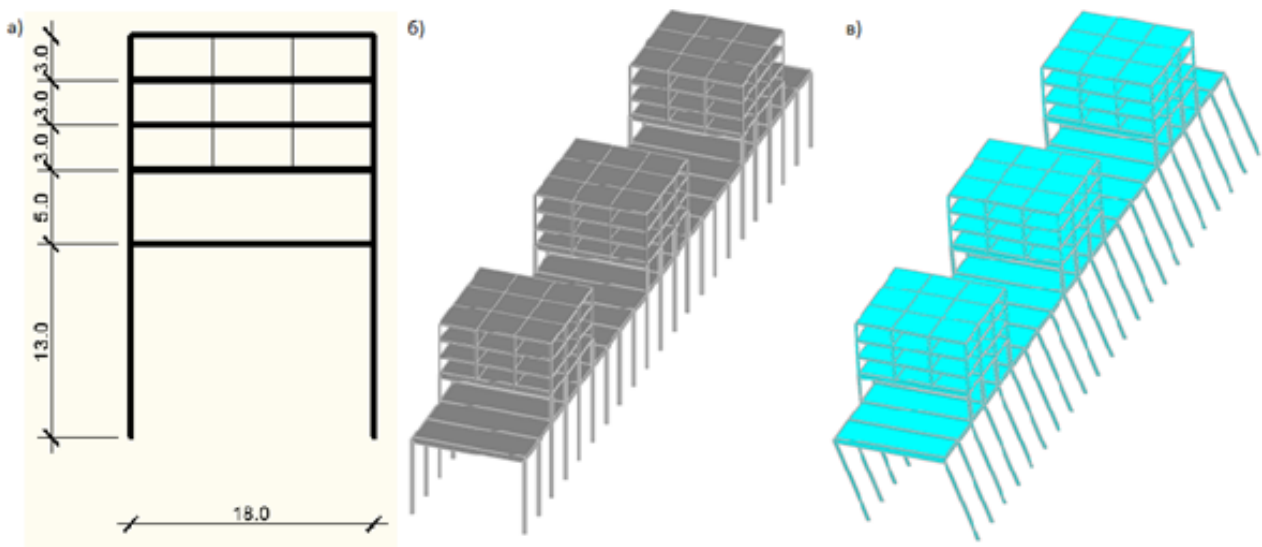


Рис. 3 – Схема поперечного разреза (а), расчетная модель (б), схема деформированного состояния (в) для третьего варианта

Как видно из рисунка 3а, автомобильная эстакада находится на высоте 13 метров над уровнем земли, однако нижняя отметка жилых секций по-прежнему составляет 18 метров, обеспечивая недостижимость их для максимально зафиксированной на Курильских островах волны цунами. Анализ результатов расчета последней модели показал, что максимальные перемещения составляют 282 мм и также, как и в предыдущих схемах, достигаются в верхней точке здания. Период колебаний здания составляет 2,5 секунды. В результате более низкого расположения дорожного полотна автомобильной эстакады и изменения схемы расположения зданий на эстакаде, удалось снизить максимальные перемещения на 107 мм по сравнению с первой схемой. В результате данного исследования выявлено, что третья схема цунамистойкого здания является наиболее сейсмостойкой из предложенных.

Список литературы

1. Васильев Г.Г., Лежнев М.А., Леонович И.А., Сальников А.П. Напряженно-деформированное состояние резервуаров, находящихся в эксплуатации // Трубопроводный транспорт: теория и практика. 2015. № 6 (52). С. 41–44.
2. Воробьев Ю.Л. Цунами: предупреждение и защита. / Ю.Л. Воробьев, В.А. Акимов, Ю.И. Соколов – М.: МЧС России, 2006. – 264 с.
3. ГОСТ 26020-83. Двутавры стальные горячекатаные с параллельными гранями полок. Сортамент. – Введ. 1986-01-01. – М.: Издательство стандартов, 1998. – 11 с.
4. ГОСТ Р 54157-2010 Трубы стальные профильные для металлоконструкций. Технические условия. – Введ. 2011-08-01. – М.: Стандартинформ, 2011. – 70 с.
5. Злобин Т.К. Природные катастрофы в литосфере Сахалино-Курильского региона и меры безопасности. / Т.К. Злобин – Южно-Сахалинск: Изд-во СахГУ, 2000. – 132 с.
6. Информация центра цунами [электронный ресурс]. Режим доступа: http://kammeteo.ru/gms_interest3.html. – (Дата обращения: 28.05.2017)
7. Попов М.А. Защита от стихийных бедствий. / М.А. Попов. – М.: Изд-во ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет природообустройства», 2014. – 128 с.
8. Шульчин В.Н. Инженерная защита населения и территории в чрезвычайных ситуациях мирного и военного времени. Книга 1. Основы инженерной защиты населения и территории в чрезвычайных ситуациях. / В.Н. Шульчин – М.: Изд-во Академический Проект, 2010. – 688 с.

К расчету ортотропных пластин на статические нагрузки с использованием разностных уравнений метода последовательных аппроксимаций

Аннотация: В историческом плане наибольшее распространение среди численных методов в задачах строительной механики наряду с МКЭ получил метод последовательных аппроксимаций. В частности, разностный метод может быть с успехом применен для решения весьма актуальных и интересных краевых задач для дифференциальных уравнений теории упругости и строительной механики плоской задачи, задачи кручения, изгиба, устойчивости и колебаний пластин и т.д. Самое широкое применение метод последовательных аппроксимаций получил для решения задач об изгибе пластин.

Считаем, что материал пластины в отношении своих упругих свойств обладает тремя плоскостями симметрии и они принимаются в качестве координатных плоскостей. Такие пластинки называются ортотропными [1]. Разрешающее дифференциальное уравнение поперечного изгиба ортотропных пластин имеет вид [1]:

$$D_x \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 W}{\partial y^2 \partial x^2} + D_y \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = q \quad (1)$$

где W – вертикальное перемещение точки плиты; q – интенсивность распределенной по поверхности пластины поперечной нагрузки; D_x ; D_y – изгибные жесткости относительно осей y , x ; H – жесткость на кручение; Для решения дифференциального уравнения (1) запишем разностные аналоги относительно вторых частных производных:

$$\begin{aligned} w_{i,j}^{\xi\xi} = & \{(\alpha + \gamma)(w_{i-1,j-1}^{\xi\xi} + w_{i-1,j+1}^{\xi\xi} + w_{i+1,j-1}^{\xi\xi} + w_{i+1,j+1}^{\xi\xi}) + \\ & + 2(5\alpha + 2\gamma - 1)(w_{i-1,j}^{\xi\xi} + w_{i+1,j}^{\xi\xi}) + 2(-\alpha + 5\gamma)(w_{i,j-1}^{\xi\xi} + w_{i,j+1}^{\xi\xi}) + \\ & + (1 + \gamma)(w_{i-1,j-1}^{\eta\eta} + w_{i-1,j+1}^{\eta\eta} + w_{i+1,j-1}^{\eta\eta} + w_{i+1,j+1}^{\eta\eta}) + \\ & + 2(5\gamma - 1)(w_{i-1,j}^{\eta\eta} + w_{i+1,j}^{\eta\eta}) + 12(w_{i,j-1}^{\eta\eta} + w_{i,j+1}^{\eta\eta}) + \\ & + 3h^2(I p_{ij} + II p_{ij} + III p_{ij} + IV p_{ij})\} / 20\bar{a}; \\ w_{i,j}^{\eta\eta} = & \{(\alpha + \gamma)(w_{i-1,j-1}^{\xi\xi} + w_{i-1,j+1}^{\xi\xi} + w_{i+1,j-1}^{\xi\xi} + w_{i+1,j+1}^{\xi\xi}) + \\ & + 12\alpha(w_{i-1,j}^{\xi\xi} + w_{i+1,j}^{\xi\xi}) + 2(-\alpha + 5\gamma)(w_{i,j-1}^{\xi\xi} + w_{i,j+1}^{\xi\xi}) + \\ & + (1 + \gamma)(w_{i-1,j-1}^{\eta\eta} + w_{i-1,j+1}^{\eta\eta} + w_{i+1,j-1}^{\eta\eta} + w_{i+1,j+1}^{\eta\eta}) + \\ & + 2(5\gamma - 1)(w_{i-1,j}^{\eta\eta} + w_{i+1,j}^{\eta\eta}) + 2(5 - \alpha + 2\gamma)(w_{i,j-1}^{\eta\eta} + w_{i,j+1}^{\eta\eta}) + \\ & + 3h^2(I p_{ij} + II p_{ij} + III p_{ij} + IV p_{ij})\} / 20\bar{a}, \end{aligned} \quad (2)$$

где:

$$\alpha = \frac{D_x}{D_y}; \gamma = \frac{H}{D_y}; p = \frac{q}{q_0}; \xi = \frac{x}{a}; \eta = \frac{y}{a}; w = \frac{W D_y}{q_0 a^4}.$$

$$w^{\xi\xi} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}; w^{\eta\eta} = \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}.$$

В качестве первого примера рассчитаем с использованием (2) квадратную шарнирно опертую по контуру плиту, загруженную в пределах своей четверти равномерно распределенной безразмерной нагрузкой (см. рисунок 1)

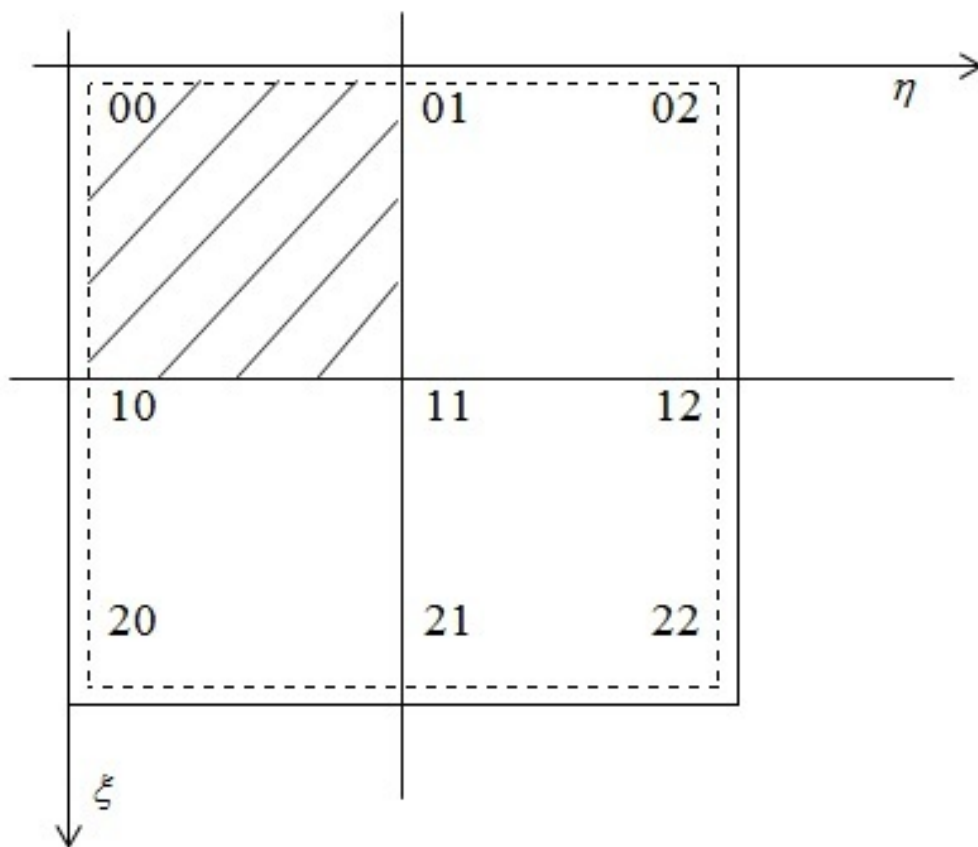


Рис. 1 – Нагруженная плита

При

$$\alpha = \gamma = 1; {}^I p_{11} = 1, {}^{II} p_{11} = {}^{III} p_{11} = {}^{IV} p_{11} = 0,$$

По (2) имеем

$$w_{11}^{\xi\xi} = w_{11}^{\eta\eta} = \frac{-3}{80}, w_{11} = 0,00391.$$

При коэффициенте Пуассона $\nu = 0,3$ получим

$$m_{11}^{\xi} = m_{11}^{\eta} = 0,0488.$$

Из решения [1]:

$$w_{11} = 0,00391;$$

$$m_{11}^{\xi} = m_{11}^{\eta} = 0,0479.$$

Погрешность нашего численного решения для изотропных плиты по сравнению с [1] составляет по прогибам $-3,7\%$; по изгибающим моментам $1,9\%$.

Второй пример: изображенную на рисунке 1 плиту считаем ортотропной. В таблице 1 дается решение этой же задачи для пластины, выполненной из фанеры, при значениях: $a = 200$ см; $\delta = 8$ см; $q_0 = 8$ т/м²; $D_x = 55,89$ тм; $D_y = 17,92$ тм; $H = 11,65$ тм.

При $n = 16$ получается разница $w - 1,66\%$ (проводится сравнение между методом МПА и МКЭ). В таблице 2 дается сравнение нашего решения с результатами [2], полученными при значениях:

$$\alpha = 0,4823; \gamma = 0,6944; \mu = 0,2083.$$

Таблица 1.
Решение задачи для пластины

Метод	Результаты	n			
		2	4	8	16
МПА	m^ξ	0,08964	0,09175	0,09193	0,09198
	m^η	0,03103	0,02967	0,02956	0,02955
	w	0,002883	0,002993	0,003001	0,003001
МКЭ	m^ξ	0,1369	0,1037	0,09500	0,09281
	m^η	0,03937	0,003219	0,03031	0,02969
	w	0,003316	0,003235	0,003052	0,003006

Значения относятся к центру ортотропной плиты, (рисунок 1) загруженной по всей площади равномерно распределенной нагрузкой $p = 1$; n – число разбиений стороны плиты.

В каждой клетке таблицы 2 даются сверху наши результаты, снизу – [2].

Таблица 2.
Сравнение результатов

n	2	4	8	16
m^ξ	0,03608	0,03487	0,03479	0,03478
	0,03608	0,03487	0,03479	0,03478
m^η	0,06313	0,06269	0,06268	0,06268
	0,06313	0,06269	0,06268	0,06268
w	0,005442	0,005636	0,005650	0,005651
	0,005442	0,005636	0,005650	0,005651

Результаты решения по разработанному нами алгоритму и результаты [2] совпадают.

Вывод: В данной работе продемонстрирована высокая эффективность и точность разностных уравнений МПА при расчете ортотропных пластин, исследована сходимость решения на вложенных расчетных сетках, выполнено сравнение полученных результатов с известным аналитическим решением и решением по МКЭ.

Список литературы

1. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластины.– М.-Л.: Гостехиздат,1947. – 355 с.
2. Смирнов В.А. Расчет пластин сложного очертания.- М.: Стройиздат,1978. – 300 с.
3. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки, перев. с англ.- М.:Наука, 1966. – 635 с.
4. Дашевский М. А. Свободные поступательно-вращательные колебания несимметричных в плане сооружений регулярной структуры //Труды ЦНИИСК им. ВА Кучеренко. – 1975. – №. 43. – С.68-72.
5. Габбасов Р.Ф., Габбасов А.Р., Филатов В.В. Численное построение разрывных решений задач строительной механики.– М.: АСВ, 2008. – 277 с.
6. Габбасов Р.Ф. Численное решение задач строительной механики с разрывными параметрами. Дисс. на соискание уч. степени докт. техн. наук. –М, МИСИ, 1989.– 343 с.

Определение бигармонического коэффициента обобщённым методом конечных разностей

Аннотация: В статье рассмотрены вопросы численного расчета бигармонического коэффициента гибких пластин. Проведен анализ полученных результатов для теоретических и численных вычислений метода конечных разностей (МКР). Рассмотрен пример в геометрически линейной постановке на действие локальных нагрузок. Система разрешающих дифференциальных уравнений решается с привлечением обобщенных уравнений пластины, загруженной в каждую четверть с распределённой нагрузкой P_n , ($n = 1, 2, 3, 4$). Проведен анализ полученных результатов для теоретических и численных вычислений.

В статье рассмотрены задачи деформирования круглых пластин. Целью является разработка достаточно точного алгоритма, рассчитывающего значения изгибающих моментов и перемещений в любой точке пластины. Выполнение расчетов круглых пластин и поведение такого типа конструкций исследовалось в ряде работ [1,2,3,4,5,7]. При задании расчетной модели моделируется либо статическое, либо динамическое нагружение в зависимости от характеристик самой пластины: размеров, значения нагрузки, а также краевых условий. Однако, на практике допускается выполнять динамические расчеты в статической постановке при умножении всех результатов на соответствующий коэффициент динамичности.

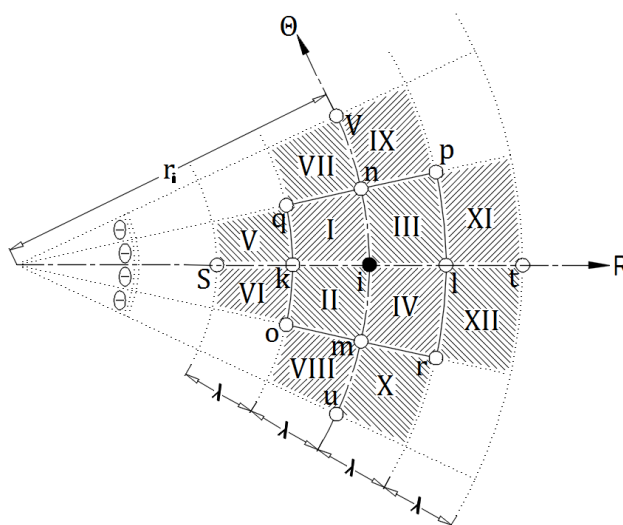


Рис. 1 – Нагружение пластины

Рассматривается круглая пластина, загруженная в каждую четверть распределённой нагрузкой P_n ($n = 1, 2, 3, 4$). Расчеты основаны на рассмотрении статических прогибов от каждой распределенной нагрузки. Далее рассматриваются такие же прогибы другим методом для сравнения результатов. Приведенные теоретические вычисления были подтверждены численным исследованием. Расчеты выполнялись в комплексе Femap с решателем NX Nastran, расхождение с теоретическими вычислениями составило порядка 4%.

В дальнейшем, полученные результаты расчетов сравнивались между собой с целью вычисления прогибов, полученных другим методом. После математических преобразований анализ полученных выражений позволяет сделать вывод, что использование выражение обобщённых конечных разностей дает более точные результаты чем обычные конечные разности.

Выводы: в работе теоретически обоснован бигармонический коэффициент обобщённым методом конечных разностей. Численные исследования показали, что значения коэффициента точнее, чем полученные классическим методом конечных разностей. С целью совершенствования и развития алгоритма расчёта круглых пластин обобщённым методом конечных разностей, рекомендуется продолжить исследования в данной области.

Список литературы

1. Габбасов Р.Ф., Габбасов А.Р., Филатов В.В. Численное построение разрывных решений задач строительной механики. Изд. АСВ, М., 2008, 280 с.
2. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. Гос. изд. технико-теоретической литературы, М., 1956, 419 с.
3. Варвак П.М., Варвак Л.П. Метод сеток в задачах расчета строительных конструкций. М., Стройиздат, 1977, 154 с.
4. Власов В.В. Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики. М., Стройиздат, 1975, 223 с.
5. Чуватов В.В. Расчёт пластинок на прочность и устойчивость методом сеток, 107 с.
6. Панов Д.Ю. Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в частных производных, Издание 5-ое, 1951, 184 с.
7. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. Издательство: Либроком. Серия Физико-математическое наследие, 2009. 640 с.
8. Амелькин В. В. Дифференциальные уравнения в приложениях. - М.: Наука. Главная редакция Физико-математической литературы, 1987. – 160 с.
9. Гутер Р.С., Резниковский П.Т. Программирование и вычислительная математика. Вып.2 М.1971 г., 264 с.
10. Волков Е.А. Численные методы: Учеб. Пособие для вузов. - 2-е изд., исп.-М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. , 1987. - 248с.
11. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. Ч.1 ,1936. 176 с.
12. Ляшенко И.Н. Задачи на собственные значения для уравнений второго порядка в частных конечных разностях, 1970, 205 с.
13. Приближенные Методы решения дифференциальных уравнений-Издательство АН УССР. Киев-1963
14. Самарский А.А. Разностные схемы для Дифференциальных уравнений с обобщенными Решениями Изд.-Высшая школа, 1987, 296с.
15. Рябенский В.С. Введение в вычислительную математику: учеб. Пособие: для вузов. - М.: физматлит, 1994. -336 с. – ISBN 5-02-014544-0.
16. Арманович И.Г., Левин В.И. уравнения математической физики М.,1969. -288 с.
17. Гавурин М.К. Лекции по методам вычислений, редакция физико-математической литературы изд-ва «наука» М., 1971.
18. Турчак Л.И. Основы численных методов: учеб. Пособие. - М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. лит., 1987. - 320 с.

Расчет собственных колебаний коробчатых настилов многоконтурного сечения для покрытий и перекрытий с учетом пространственной работы конструкции

Аннотация: Исследуется проблема собственных колебаний широких коробчатых настилов многоконтурного сечения для покрытий и перекрытий с учетом их пространственной работы в сравнении с существующим балочным подходом. Расчетная схема конструкции рассматривается как призматическая оболочка средней длины, для расчета которой применяется полубезмоментная вариационная теория В.З. Власова в сочетании со статической аппроксимацией базисных функций перемещений.

Коробчатые настилы, применяемые для устройства покрытий и перекрытий промышленных зданий, наряду со своей высокой прочностью и жесткостью позволяют обеспечить беспрепятственную подачу воздуха в производственные помещения через пустоты конструкций, осуществить прокладку инженерных сетей и технологических коммуникаций. В соответствии с [1] коробчатые настилы рекомендуется принимать однопустотными, двухпустотными или трехпустотными, с постоянными по длине сечениями пустот, ребер и полок (Рис. 1).

При наличии стыков, препятствующих взаимным смещениям коробчатых настилов, установленных в перекрытиях без промежутков, конструкция перекрытия с точки зрения механики представляет собой призматическую оболочку многоконтурного сечения, расчет которой производится с учетом пространственной работы конструкции [1].

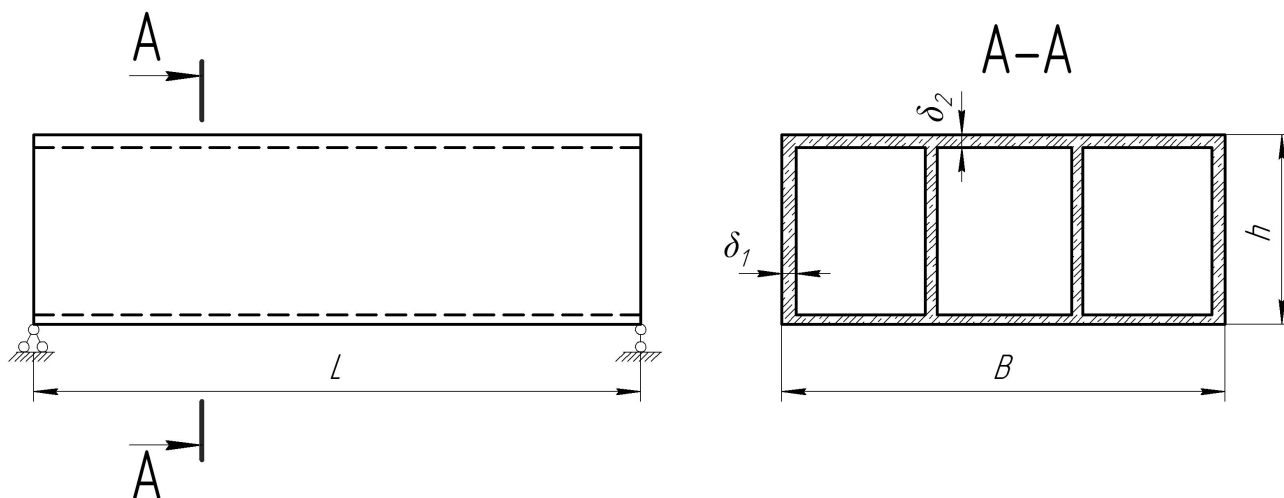


Рис. 1 – Трехпустотный коробчатый настил

Вместе с тем при определении значений частот собственных колебаний коробчатых настилов, расчетная схема такого перекрытия рассматривается в виде шарнирно опертой балки с жестким недеформируемым контуром, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой (Рис. 2). Поперечное сечение коробчатого настила приводится к двутавровому сечению, а спектр собственных частот определяется как в балке постоянного сечения с равномерно распределенной массой:

$$\omega_i = (\bar{m}\pi/L)^2 \sqrt{EI/\mu} \quad (1)$$

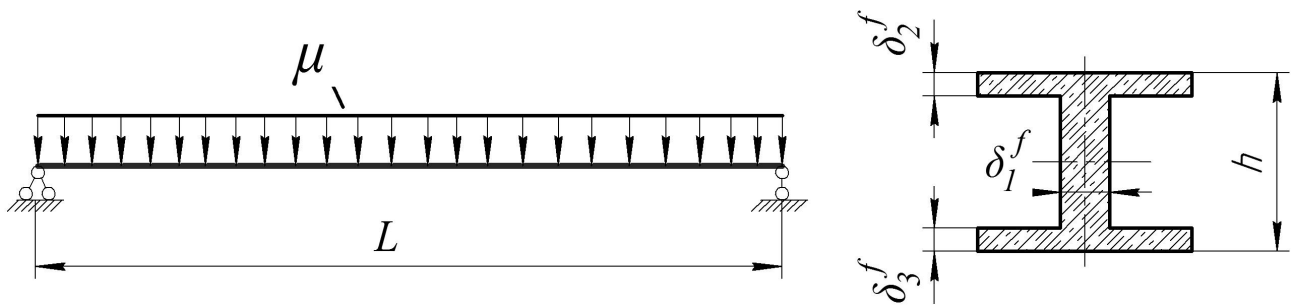


Рис. 2 – Расчетная схема и поперечное сечение коробчатого настила, приведенное к двутавровому сечению

Здесь: $\bar{m} = 1, 2, 3, \dots$ – волновое число, L – длина коробчатого настила, EI – жесткость приведенного сечения, μ – погонная масса.

В предлагаемом подходе собственные колебания коробчатых настилов исследуются с учетом пространственной работы конструкции как в призматической оболочке с деформируемым контуром поперечного сечения. Если многие вопросы пространственного статического расчета призматических оболочек многоконтурного сечения уже решены [3,5–9,11], то развитие метода исследования собственных колебаний таких конструкций [4,10,12] для надежного контроля их численного расчета и оценки достоверности результатов является актуальной задачей.

В основе предлагаемого метода полубезмоментная вариационная теория В.З. Власова – И.Е. Милейковского [5,8], разработанная для оболочек средней длины, которым будут соответствовать перекрытия с соотношением размера длины к ширине в диапазоне 1–6. Исходная система заменяется эквивалентной системой путем приведения массы оболочки к ее узловым линиям. В результате реальная конструкция с бесконечным числом степеней свободы заменяется дискретно-континуальной системой с конечным числом степеней свободы в поперечном направлении и бесконечным в продольном, в этом случае инерционные свойства сосредотачиваются в узловых линиях конструкции (рисунок 3).

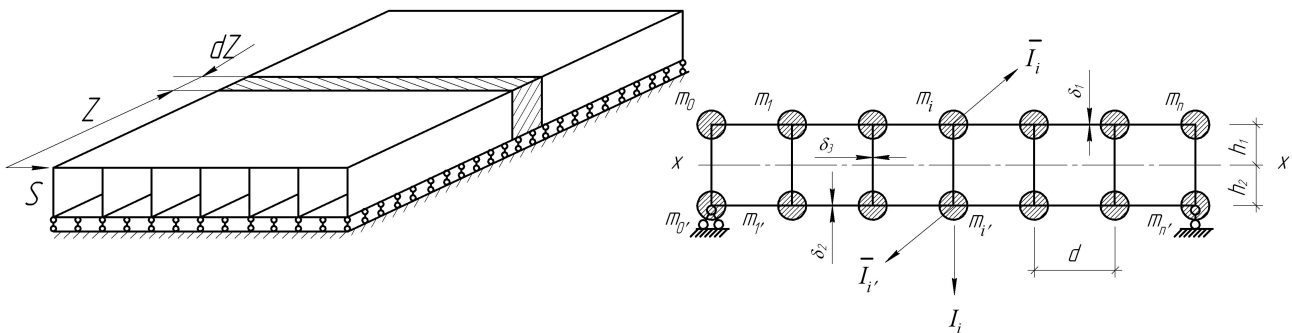


Рис. 3 – Призматическая оболочка многоконтурного сечения и поперечное сечение расчетной схемы

Продольные и поперечные перемещения представляются в виде:

$$u_i(z, s, t) = U_i(z, t) \cdot \phi_i(s) = U_i(z) \cdot T(t) \cdot \phi_i(s),$$

$$v_i(z, s, t) = V_i(z, t) \cdot \psi_i(s) = V_i(z) \cdot T(t) \cdot \psi_i(s),$$

где: $\phi_i(s)$, $\psi(s)$ – базисные функции, аппроксимирующие продольные (депланация) и поперечные (деформация контура) перемещения, которыми необходимо задаваться; $V_i(z), U_i(z)$ – функции обобщенных продольных и поперечных перемещений, являются искомыми; $T = \sin(\omega \cdot t)$ – временная функция гармонических свободных колебаний.

Силы инерции в произвольном узле определяются выражениями:

$$I_i = -(m_i + m'_i) \cdot \frac{\partial^2 V_i(z, t)}{\partial t^2},$$

$$\bar{I}_i = -m_i \cdot \frac{\partial^2 U_i(z, t)}{\partial t^2},$$

$$\bar{I}'_i = -m'_i \cdot \frac{\partial^2 U_i(z, t)}{\partial t^2}$$

Базисные функции перемещений в поперечном направлении $\psi(s)$ задаются с помощью статической аппроксимации [9] в результате решения вспомогательной задачи изгиба элементарной рамы-полоски от последовательного нагружения узлов сосредоточенной единичной инерционной силой (Рис. 4). Учитывая, что в оболочках средней длины из сплошных элементов влияние деформацией сдвига в плоскостях граней оболочки на величины перемещений пренебрежимо мало [8], между базисными функциями перемещений справедлива зависимость $\phi'(s) = \psi(s)$. В результате оказываются заданными и функции перемещений в продольном направлении $\phi(s)$.

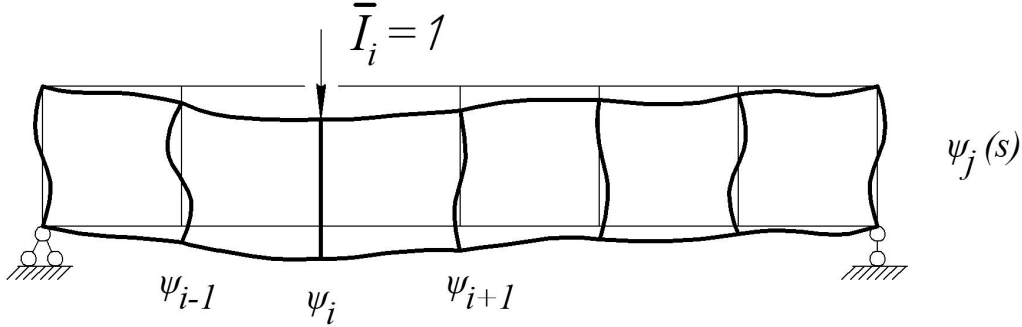


Рис. 4 – Статическая аппроксимация функций перемещений

Вариационные уравнения динамического равновесия элементарной рамы полоски $dz = 1$ как суммы работ внешних и внутренних сил на возможных перемещениях $\psi(s)$ и $\phi(s)$ с учетом зависимости между обобщенными перемещениями $U(z) = -V'(z)$ [8] имеют вид:

$$\sum a_{ji} V_i^{IV}(z) + \sum s_{ji} V_i(z) = \frac{1}{E} \bar{q}_j(z) + \frac{1}{E} \bar{p}'_j(z) + \frac{1}{E} \bar{p}'_{j'}(z), \quad (2)$$

где: $V_i(z)$ — функция обобщенного поперечного перемещения, $\bar{q}_j(z) = I_j \cdot \psi_j = (m_j + m_{j'}) \cdot \omega^2 \cdot V_j(z) \cdot \psi_j^2$ — возможная работа сил инерции в плоскости поперечного сечения, $\bar{p}'_j(z) = -m_j \cdot \omega^2 \cdot V_j''(z) \cdot h_1^2 \cdot \psi_j^2$, $\bar{p}'_{j'}(z) = -m_{j'} \cdot \omega^2 \cdot V_j''(z) \cdot h_2^2 \cdot \psi_j^2$, — возможная работа сил инерции из плоскости поперечного сечения (здесь ω^2 — квадрат частоты собственных колебаний),

$$a_{ij} = \delta \int \phi_j(s) \cdot \phi_i(s) ds,$$

$$s_{ij} = \frac{1}{E} \int \frac{M_j(s) \cdot M_i(s)}{EI} ds$$

Порядок системы (2) будет равен числу промежуточных стенок конструкции. При граничных условиях соответствующих шарнирному закреплению оболочки перекрытия по

контуру решению уравнений (2) будет удовлетворять функция $V_i(z) = V_i \sin \frac{\bar{m}\pi z}{L}$, где $\bar{m} = 1, 2, 3, \dots$ – волновое число. После подстановки получим систему однородных алгебраических уравнений, определитель которой представляет собой уравнение частот собственных колебаний рассматриваемой оболочки.

В таблице 1 и на рисунке 5 приведены результаты расчета коробчатого перекрытия многоконтурного сечения с учетом пространственной работы, в сравнении с балочным подходом. Перекрытие с размерами в плане 18x12 (м) ($L/B = 1,5$) и высотой $h = 0,9$ (м) имеет в поперечном сечении 12 ячеек шириной 1(м), толщину полок и ребер $\delta = 3$ (см). Марка бетона коробчатого настила В25 ($E_b = 3 \cdot 10^4$ МПа).

Границы частотных зон определены из выражения:

$$\nu = \frac{1}{\pi}(1 \pm \varepsilon_0) \cdot \omega_i,$$

здесь $\varepsilon_0 = 0,25$ – возможная погрешность при определении частот собственных колебаний коробчатого настила, принятая в расчете как для однопролетных балок (в соответствии с [2] при уточнении расчетных схем и жесткостей элементов конструкций погрешность ε_0 может быть снижена до 0,15 для перекрытий до 0,1 для покрытий).

Таблица 1.

Границы частотных зон собственных колебаний коробчатого настила, Гц

Номер частоты	В балке		В оболочке	
	ν	ν'	ν	ν'
ω_1	4,21	8,2	7,79	12,99
ω_2	19,67	32,78	10,55	17,59
ω_3	44,03	73,38	13,74	22,9

Примечание: в таблице приведены значения для первых трех частот спектра.

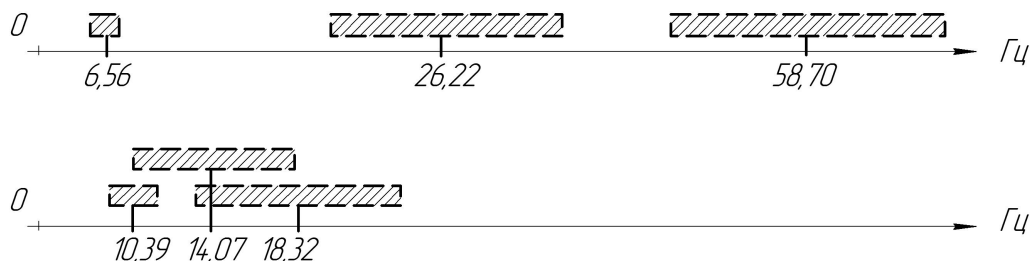


Рис. 5 – Границы частотных зон коробчатого перекрытия (первые три значения спектра):

а) балочный расчет; б) призматическая оболочка с деформируемым поперечным сечением.

Анализ результатов показывает, что за счет опирания продольных краев минимальная частота собственных колебаний в оболочке выше, чем в балке, закрепленной только по торцам. Вместе с тем при определении границы частотных зон для коробчатых настилов за расчетную собственную частоту конструкции принимается частота ближайшая по значению к частоте вынужденных колебаний, в связи с этим расчет с учетом пространственной работы (Рис. 5.а) за счет более плотного распределения частотного спектра будет лучше «улавливать» резонанс. Наряду с этим предлагаемый подход к исследованию на динамические воздействия многоконтурных коробчатых перекрытий по пространственно деформируемой расчетной схеме учитывает колебания конструкции, которые происходят

за счет деформации контура поперечного сечения. Это позволит построить формы собственных колебаний, как в продольном, так и в поперечном направлении, и применить вместо линейной схемы модель точек приложения динамических нагрузок по площади перекрытия от оборудования, установленного на коробчатое перекрытие.

Список литературы

1. Рекомендации по проектированию и применению железобетонных коробчатых настилов для покрытий и перекрытий / Центр. научн.- исслед. и проектно-эксперим. ин-т промзданий и сооружений Госстроя СССР – М.: ЦНИИ промзданий, 1987.–113 с.
2. Инструкция по расчету несущих конструкций промышленных зданий и сооружений на динамические нагрузки – М.: Стройиздат, 1970.-289 с.
3. Александров А.В. Расчет коробчатых балочных пролетных строений по методу перемещений // Исследования по теории сооружений. – М.: Стройиздат, 1965. Вып. XIV. С. 209–213.
4. Altenbach I., Kissing W. Statische und dynamische Analyse fur prismatische und nichtprismatische Kastentrager // Technische Mechanik, Magdeburg, 1986, H.1, Nr. 7, S. 37–41.
5. Власов В.З. Тонкостенные пространственные системы. – М.: Госстройиздат, 1958. – 520 с.
6. Ignatiev V.A., Sokolov O.L. Thin-Walled Cellular Structures (methods for their analysis). – New Delhi/Calcutta: Oxford & IBI Publ. Co. PVT. LTD., 1999. – 214 p.
7. Kissing W. Zur Behandlung dünnwandig geschlossener Konstruktionen mit einer verallgemeinerten halbmomentenfreien Schalentheorie nach Wlassow // Technische Mechanik, Magdeburg, 1982, H.1, Nr. 3, S. 67–70.
8. Милейковский И.Е. Расчет оболочек и складок методом перемещений. – М.: Госстройиздат, 1960. – 298 с.
9. Соколов О.Л. Расчет многосвязных призматических оболочек регулярной структуры // Строительная механика и расчет сооружений. 1984. №4. С. 14–16.
10. Соколов О.Л., Ильичев Е.А. Свободные колебания коробчатых пролетных строений широких мостов-эстакад многоконтурного сечения // Промышленное и гражданское строительство. 2012. №6. С. 50–51.
11. Соколов О.Л. Статика бездиафрагменных коробчатых пролетных строений многоконтурного сечения. – Вологда: ВоГТУ, 2013. – 134 с.
12. Соколов О.Л., Ильичев Е.А. Определение спектра частот и главных форм колебаний коробчатых пролетных строений многоконтурного сечения // Вестник МГСУ. 2014. №5. С.51–56.

О моделировании переменной структуры несущего каркаса здания

Аннотация: Представленные тезисы посвящены разработке системы анализа состояний элементов каркасных зданий. Учитывая, что основные элементы современных каркасных зданий представляют собой стержни (каркас), то использование в расчетах рассмотренной модели вполне рационально. Предварительно сформирована математическая модель на основе аналитических выражений, описывающих элементы каркаса здания и учитывающих их физическое состояние и связи между ними. Применение аналитических моделей позволяет более полно учитывать состояние несущих конструкций каркаса при выполнении, например, анализа жизнестойкости каркасных зданий.

О концепции моделирования

Рассматривается вариант алгоритма метода конечных элементов, ориентированный на анализ конструкции здания при наличии запроектных воздействий. Особенностью алгоритма является возможность изменения не только свойств отдельных элементов стержневой системы, но и связей между ними. Предполагается, что стержневая система состоит из суперэлементов и термины "Стержень" и "Суперэлемент системы" эквивалентны. Этот алгоритм составляет суть математической модели каркаса здания.

В то же время отметим один присущий данному алгоритму недостаток: в нем предполагается, что если в одном узле соединяется несколько конечных элементов, то все их степени свободы совпадают. Такое вполне допустимо, если проводится дискретизация сплошного массивного тела, где высказанное утверждение справедливо. Однако для строительных конструкций это положение неприемлемо. Например, для шарнирного соединения стержней в узлах стропильной фермы объединяются только линейные перемещения; углы поворота каждого стержня, соединяющегося в одном узле, независимы и должны быть занумерованы отдельно. В рамках приведенного алгоритма это затруднительно.

В связи с изложенным, представляется более адекватным реальной строительной конструкции алгоритм, основанный на концепции связей между стержнями. Этот алгоритм позволяет легко моделировать переменную структуру системы при запроектных воздействиях типа изменения структуры при разрушении отдельных связей между стержнями. Для этого нужно изменить структуру матрицы связей, исключая из неё разрушенные связи. В результате предложен алгоритм, который может применяться к решению статических и динамических задач.

Задачи, возникающие при анализе стержневой системы

Анализ состояний стержневой системы требует решения последовательности статических и динамических задач, составляющих сценарий жизненного цикла системы.

Начальное состояние системы – статическое, под действием собственного веса при идеальной структуре связей. Помимо этого, следует определить исходный спектр системы путем решения однородной динамической задачи.

Состояния системы под действием ветровых и сейсмических нагрузок решаются как динамические неоднородные, накладывающиеся на исходное статическое состояние. Запроектные воздействия приводят к динамическим задачам, протекающим на фоне предыдущего статического состояния.

Последовательность таких воздействий может быть реализована поэтапно, с решением одной задачи за сеанс работы с программой при сохранении результатов каждого этапа.

Список литературы

1. Белостоцкий А. М., Каличава Д. К. Математическое моделирование как основа мониторинга зданий и сооружений // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2010. Т. 6. №1–2. С. 78–79.
2. Ковальчук О. А. Моделирование пространственных стержневых систем методом конечных элементов // Строительство: наука и образование. 2012. №1. С. 1–6.
3. Огурцов Ю. Н. Реализация многоуровневого суперэлементного подхода к расчету конструкций // Строительная механика и расчет сооружений 1989. №5. С. 50–54.
4. Плетнев В.И., Сергеев М.В. Суперэлементный расчет зданий и сооружений в форме метода сил // Изв. вузов. Строительство и архитектура. №10. 1998. – С. 116–119.
5. Постнов В.А. Численные методы расчета судовых конструкций. Л.: Судостроение, 1977. – 279 с.
6. Пржеминичский Е.С. Матричный метод исследования конструкций на основе анализа подструктур. – Ракетная техника и космонавтика, 1963, № 1.
7. Райзер В. Д. К проблеме живучести зданий и сооружений // Строительная механика и расчет сооружений. 2012. №5. С. 77–78.
8. Сафронов В. С., Катембо А. Л. Расчет несущей способности внецентренно сжатого стержня из железобетона с использованием деформационной модели // Строительная механика и конструкции. 2016. Т. 1. №12. С. 64–74.
9. Соболев В. В. Численный метод устойчивого решения задачи Сен-Венана о кручении стержня с произвольной односвязной областью сечения // Вестник Томского государственного университета. 2009. №4 (8). С. 98–111.
10. Тамразян А. Г. Динамическая устойчивость сжатого железобетонного элемента как вязкоупругого стержня // Вестник МГСУ. 2011. № 1–2. С.193–196.
11. Тамразян А. Г. Живучесть ключевых элементов как основной критерий стойкости высотных зданий от прогрессирующего обрушения // Сборник научных трудов «Современные строительные конструкции из металла и древесины». 2010. Ч. 1. С. 264–271.
12. Тамразян А. Г. Ресурс живучести – основной критерий проектных решений высотных зданий // Жилищное строительство. 2010. № 1, С.15–18.
13. Тамразян А. Г., Ковальчук О. А. Матрица влияния модели суперэлемента прямого стержня с поперечными трещинами на динамическое состояние упругих и линейно-вязкоупругих тел // Вестник НИЦ Строительство. 2011. №3–4. С. 120–130.
14. Толоконников Л.А. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Высшая школа, 1979. – 318с.
15. Шостак Р.Я. Операционное исчисление. – М.: Высшая школа, 1972. – 279с.

Кустов А.А., аспирант, НИУ МГСУ, Москва, Россия

Можин Н.А., аспирант, НИУ МГСУ, Москва, Россия

Трушин С.И., д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия

Численное моделирование мембраны воздухоопорных сооружений

Аннотация: В докладе приведен краткий литературный обзор по расчету мембран воздухоопорных сооружений. Обосновано использование линейно-упругой ортотропной модели материала мембраны воздухоопорной оболочки при численном моделировании аэроупругого взаимодействия воздухоопорного сооружения с потоком воздуха. Представлены результаты решения верификационных задач, показано их хорошее соответствие эталонным решениям.

В статье [2] была рассмотрена методика и пример численного моделирования аэроупругого взаимодействия воздухоопорного сооружения (далее по тексту – ВОС) с потоком воздуха в программном комплексе Ansys Workbench. Обязательными условиями получения достоверных результатов является корректное решение трех компонентов задачи:

- деформирование мембраны ВОС (задача строительной механики);
- внешнее обтекание оболочки (задача вычислительной аэродинамики);
- итерационный обмен данными между отдельными модулями программы, которые используются для решения отдельных компонентов.

Настоящий доклад посвящен верификационным исследованиям численных моделей и подходов, использованных нами при решении задачи о деформировании мембраны ВОС.

На основе проведенного анализа современной отечественной и зарубежной научной и нормативной литературы, а также проведенных пробных расчетов обосновывается применение линейно-упругой ортотропной модели материала мембраны.

Решение задачи аэроупругого взаимодействия ВОС с потоком воздуха производится в динамической постановке. По аналогии с работой [1] для проверки корректности использованных моделей были отобраны и успешно решены тестовые задачи из работ [3, 4] по определению собственных частот и форм воздухоопорной оболочки (пневмобалки) с учетом ее предварительного напряжения избыточным давлением.

Из-за особенностей численных алгоритмов, заложенных в программный комплекс Ansys Workbench, возникла необходимость искусственного разделения мембраны на две составляющие: внутреннюю (к ней прикладывается внутреннее давление) и наружную, которая служит для обмена данными с модулем вычислительной аэродинамики. Были выполнены дополнительные расчеты, которые показали возможность такой замены без потери точности решения. Их результаты отражены в докладе.

Таким образом в докладе на серии успешно решенных верификационных задач показана применимость и корректность принятого подхода к решению задач деформирования воздухоопорных оболочек в Ansys Workbench.

Список литературы

1. Бозняков Е.И., Афанасьева И.Н., Белостоцкий А.М. Численное моделирование аэроупругих колебаний тонкостенных оболочек в трехмерном воздушном потоке. Часть 1: Верификация механической конечноэлементной модели // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering / Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций. 2016. Volume 12, Issue 2. С. 75-85.
2. Мокин Н.А. Проведение нелинейных расчетов воздухоопорных оболочек // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. №2. С. 24-34.
3. Apedo K.L., Ronel S., Jacquelin E., Tiem S. Free vibration analysis of inflatable beam made of orthotropic woven fabric // Thin-Walled Structures. 2014. (78). pp. 1–15.
4. Thomas J.-C., Jiang Z., Wielgosz C. Continuous and Finite Element Methods for the Vibrations of Inflatable Beams // International Journal of Space Structures. 2006. № 4 (21). pp. 197–222.

Применение глубинных датчиков на основе тензорезисторов при исследовании деформаций ползучести тяжелого бетона

Аннотация: Рассматривается вопрос эффективности использования глубинных датчиков на основе тензорезисторов при исследовании деформационных характеристик бетона. Описана технология их изготовления, монтажа и методология проведения измерений. Представлены результаты экспериментальных исследований кратковременного и длительного деформирования бетона с применением данного типа датчиков и индикаторов часового типа.

Экспериментальные исследования деформирования бетона в условиях сложного напряженного состояния при кратковременном и длительном действии нагрузки сопряжены с большими методическими трудностями. Основной проблемой таких исследований является ограниченное или полное отсутствие доступа к поверхности бетонного образца, что затрудняет измерение деформаций традиционными измерительными приборами. Кроме того, зона измерений должна находиться как можно дальше от поверхности контакта образца и нагружающего элемента. Для решения данной проблемы в работах [1-5] предлагается использовать тензометрические датчики, погруженные в оболочку из смеси эпоксидной смолы [1] или клея БФ-2 [2-5] с наполнителем из крупнозернистого песка или цемента. Такая конструкция позволяет размещать датчики в толще бетонного образца. В работах [1-5] рассматривалось применение глубинных датчиков при кратковременном действии нагрузки. Целью данной работы является оценка их эффективности при длительном действии нагрузки.

В лаборатории ДонНАСА были проведены экспериментальные исследования на образцах, изготовленных из тяжелого бетона. Состав бетонной смеси из расчета на 1 м^3 : портландцемент марки 400 – 332 кг, песок – 750 кг, щебень – 1080 кг, вода – 215 л. В качестве опытных образцов при исследовании ползучести бетона использовались бетонные призмы с размерами $100 \times 100 \times 400 \text{ мм}$. Образцы бетонировались в стальных формах в горизонтальном положении. В формы перед бетонированием дополнительно были установлены стальные плиты-оголовки толщиной 40 мм с центрирующими сферическими лунками под шаровые опоры. Одновременно с образцами-призмами дополнительно изготавливались образцы-кубы с размерами $150 \times 150 \times 150 \text{ мм}$. Образцы выдерживались в формах в течение 4 суток. Для уменьшения влияния усадочных деформациях крайних и внутренних объемов бетона образцы после распалубливания покрывались гидроизоляцией, состоящей из парафина и нескольких слоев полиэтиленовой пленкой.

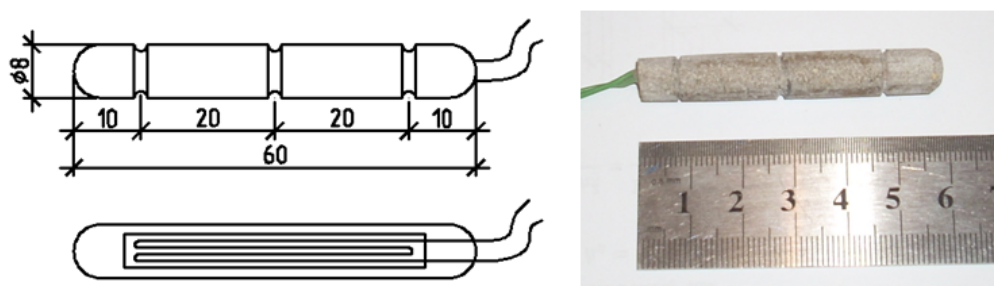


Рис. 1 – Общий вид глубинных датчиков

В настоящем исследовании применялись глубинные датчики, изготовленные согласно технологии, предложенной в работе [1]. Для формовки датчиков использовались две силиконовые формы. В первой форме из смеси эпоксидной смолы и крупнозернистого песка

изготавливались пластинки размером 60x8x4мм, на которые после отверждения приклеивались тензорезисторы с предварительно подпаянными медными проводками. Полученные заготовки укладывались во вторую форму с выемками 60x8x8 мм и покрывались вторым слоем эпоксидно-песчаной смеси. После застывания заготовки доводились до цилиндрической формы на точильном круге. Для улучшения сцепления с бетоном по окружности датчиков выполнялись три кольцевые борозды глубиной и шириной 2 мм (рисунок 1).

Для фиксации датчиков в металлической форме использовалась натянутая стальная проволока диаметром 0.7 мм. Датчики размещались взаимно перпендикулярно (по направлениям развития главных деформаций) с зазором, обеспечивающим свободное прохождение фракции крупного заполнителя бетонной смеси. Схема расположения в образце-призме представлена на рисунке 2. Измерение показаний датчиков осуществлялось с помощью тензометрической системы, выполненной на базе модуля ввода сигналов MB110-4ТД фирмы OWEN по схеме «полный мост».



Рис. 2 – Схема расположения глубинных датчиков в опалубке

Дополнительно экспериментальные образцы оснащались металлическими рамками с закрепленными на них индикаторами часового типа. Для измерения продольных деформаций применялись индикаторы с ценой деления 0.01 мм и базой измерения 200 мм, для поперечных – индикаторы с ценой деления 0.001 мм и базой измерения 100 мм.

Класс прочности бетона определялся по результатам испытаний образцов кубов в возрасте 28 сут. Кубиковая прочность составила 20 МПа. Деформационные характеристики бетона определялись путем испытания образцов-призм на сжатие на гидравлическом прессе ПГ-125. Нагружение осуществлялось этапами с выдержкой 4 минуты. Нагрузка на каждом этапе составляла 10% от предполагаемой призмной прочности. Величина призмной прочности составила 14 МПа. Начальный модуль деформаций и коэффициент поперечных деформаций определялись при напряжениях и составили $E_0 = 26500$ и $\mu_0 = 0.18$ соответственно.

На рисунке 3 представлены диаграммы деформирования образцов, полученные по показаниям датчиков часового типа и тензорезисторов.

Нагружение образцов-призм длительной нагрузкой осуществлялось на установках рычажного типа. Призмы испытывались при различных уровнях нагружения $|\sigma_3|/R_b : 0.25, 0.4, 0.6, 0.8$. Два ненагруженных образца хранились в тех же условиях, что и образцы, подверженные длительному сжатию. Оснащение измерительными приборами всех образцов

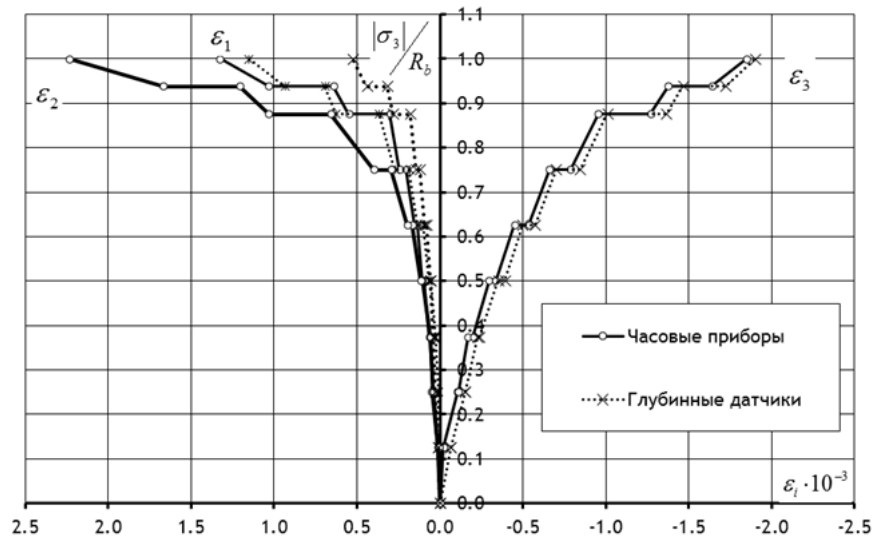


Рис. 3 – Диаграмма деформирования бетона исследуемых образцов при кратковременном сжатии, полученная по показаниям приборов часового типа и глубинным датчикам

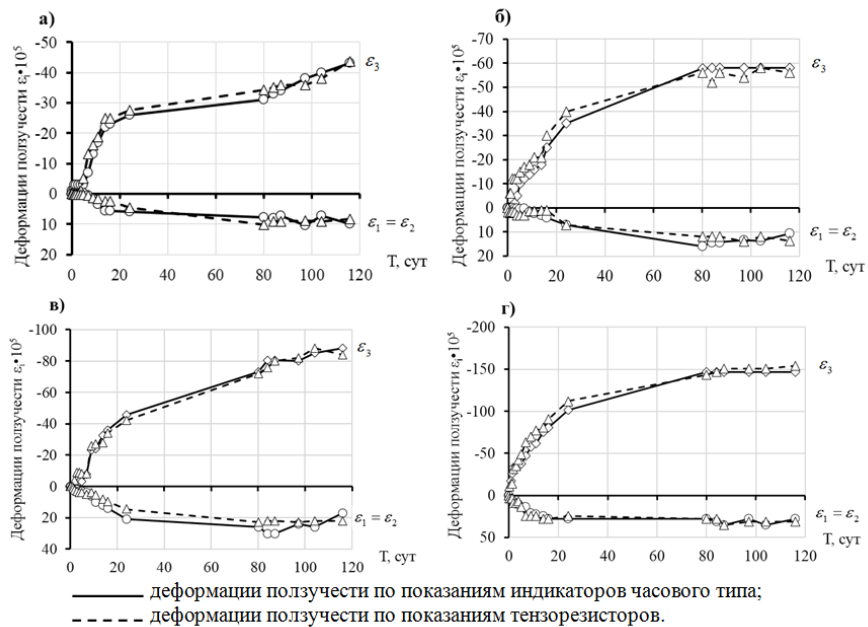


Рис. 4 – Деформации ползучести образцов-призм при $|\sigma_3|/R_b$:
а) 0.25; б) 0.4; в) 0.6; г) 0.8

осуществлялось аналогично образцам подвергнутым кратковременному сжатию. Возраст бетона к моменту нагружения составлял 30 суток. Длительность испытания составляла 116 суток. В процессе испытания производилось одновременное снятие показаний по индикаторам часового типа и глубинным датчикам. Деформации ползучести определялись как разница полных длительных деформаций и деформаций ненагруженных образцов-компенсаторов, которые находились в тех же условиях. Испытания проводились в летний период, температура воздуха в помещении лаборатории составляла $20 \pm 2^\circ$.

На рисунке 4 представлены графики изменения деформаций ползучести бетона с течением времени. Деформации, измеренные с применением тензометрирования, в незначи-

тельной мере отличаются от деформаций, полученных с помощью индикаторов часового типа, что свидетельствует о возможности применения глубинных датчиков на основе тензорезисторов при исследовании как кратковременного, так и длительного деформирования бетона.

Представленные экспериментальные данные, а также результаты исследований, изложенные в работах [1-4], свидетельствуют о перспективности применения рассмотренных датчиков для исследования напряженно-деформированного состояния бетона. Основными преимуществами являются простота, незначительная стоимость их изготовления и возможность использования традиционных измерительных тензометрических систем. Однако, существенные затруднения могут возникнуть при измерении деформаций в условиях повышенных температур. В первую очередь это связано с малой термостойкостью, используемой для их изготовления, эпоксидной смолы. Вопрос о применении оболочки датчика с использованием клея БФ-2 (или другого материала) при воздействии повышенных температур требует дальнейших исследований.

Список литературы

1. Безгодков И. М., Горбунов И. А., Шульгин П. Ю. К вопросу о методике исследования бетона в условиях трехосного сжатия // Электронный журнал. Предотвращение аварий зданий и сооружений. 2010. Режим доступа: <http://pamag.ru/src/prensa/076.pdf>
2. Ватуля Г. Л. и др. Исследование деформативности бетонных колонн методом глубинной тензометрии //Збірник наукових праць [Полтавського національного технічного університету ім. Ю. Кондратюка]. Сер.: Галузеве машинобудування, будівництво. – 2014. – №.3 (2). – С. 30-36.
3. Ватуля Г. Л., Галагурия Е. И., Петренко Д. Г. Определение деформаций бетона с помощью глубинных датчиков //Транспорт. Транспортные сооружения. Экология. – 2014. – №. 2. – С. 48-56.
4. Ватуля Г. Л., Галагурия Е. И., Петренко Д. Г. Определение механических характеристик конструкций с помощью глубинных датчиков // Будівельна механіка і гідравліка. Збірник наукових праць УкрДАЗТ. – 2016. – вып.138. – С. 231-235.
5. Красновский Р.О. О методике испытания железобетонных балок на действие поперечных сил // Методика лабораторных исследований деформаций и прочности бетона, арматуры и железобетонных конструкций. – М.: Госстройиздат. – 1962. – С. 160-173

Мондрус В.Л., д-р техн. наук, проф., НИУ МГСУ, Москва, Россия
Сизов Д.К., канд. техн. наук, НИУ МГСУ, Москва, Россия

Особенности численной реализации решения задачи динамики пластины с использованием языка программирования Python

Аннотация: В докладе приводится решение задачи динамического расчета пластинки, отдельные элементы которой имеют заданное внешнее смещение, источники вибрационного воздействия находятся на контуре пластинки и в пяти внутренних областях внутри нее.

Одним из современных языков программирования общего назначения является язык Python. Особенностью написания программ на данном языке является предельная ясность программного кода, максимальная ориентация на повышение производительности труда разработчика. Язык является свободно распространяемым и имеет реализации интерпретатора практически для всех современных компьютерных платформ.

Учитывая тот факт, что скорость выполнения программ интерпретатором является заведомо значительно более низкой, нежели исполняемых файлов программ, написанных на компилируемых языках программирования, таких как Fortran, C, C++, необходимо при реализации вычислительных процедур основное внимание уделять возможно большему использованию численных библиотек, которые могут быть беспрепятственно использованы в языке Python. В частности, свободнораспространяемая среда программирования Anaconda в стандартном дистрибутиве уже содержит множество численных библиотек, позволяющих обладать удобством манипуляции с массивами и массивоподобными объектами на уровне языка Matlab, либо Fortran, при этом скорость вычислений в значительной степени определяется алгоритмами самих численных библиотек. Используя язык Python в качестве соединяющего языка (языка-клея) при обращении к библиотекам, написанным на различных компилируемых языках, возможно получить программу, выполняющуюся так же быстро, как и с применением компилируемых языков программирования. Как известно, сейчас сообществом разработчиков языка Python одновременно поддерживаются две ветви развития языка: Python2x и Python3x, в качестве эталонной реализации чаще всего рассматривается версия интерпретатора CPython, хотя существует и ряд других интерпретаторов, в частности, Jython, IPython, основанные либо на Java-классе, либо ориентированные для работы в Microsoft.NET Framework. Особенного внимания заслуживает экспериментальная версия интерпретатора PyPy, реализованная на языке Python. В научных вычислениях наиболее часто применяется версии Python2x, что объясняется, прежде всего несколько более простой объектной моделью языка и более высокой скоростью работы Python2x по сравнению с Python3x.

Одними из наиболее часто используемых библиотек, используемых в Python являются NumPy и SciPy, которые позволяют расширить стандартные объекты Python массивами, функциями для работы с массивами, матричными объектами, функциями работы с полиномами, функции линейной алгебры и др. Использование этих библиотек позволяет создавать быстрые численные программы пока большинство операций производится не над скалярами, а над массивами и матрицами—объектами данных библиотек. Для отображения научной графики—матриц, срезов массивов часто применяется пакет Matplotlib, включающий в себя основные инструменты отображения графиков функций одной и многих переменных. Возможным является использование и такое средство визуализации результатов вычислений как Gnuplot, обладающее встроенным собственным языком и своей системой команд.

В докладе приводится решение задачи динамического расчета пластинки, отдельные элементы которой имеют заданное внешнее смещение, источники вибрационного воздействия находятся на контуре пластинки и в пяти внутренних областях внутри нее. Изменение координат точек, расположенных на контуре пластинки и внутри нее происходит по гармоническому закону с различными частотами. На рисунке 1 показана схема пластинки с учетом приложенных смещений.

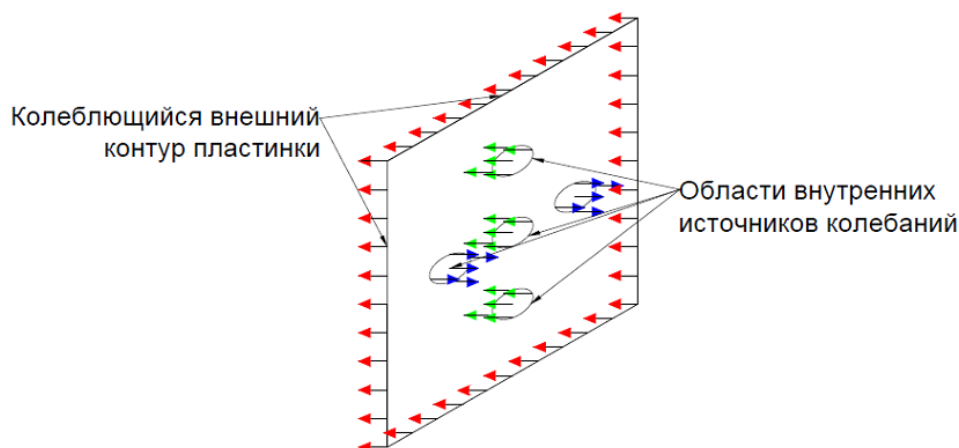


Рис. 1 – Схема расположения источников колебаний на квадратной пластинке

При постоянной изгибной жесткости пластины уравнение колебаний имеет вид:

$$D\Delta\Delta w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, t), \quad (1)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – изгибная жесткость пластины;

E, ρ, ν, h, w – соответственно модуль упругости материала пластинки, плотность, коэффициент Пуассона, толщина пластинки и прогиб срединной поверхности;

$q(x, t)$ – внешняя нагрузка на пластинку, зависит от координат точки приложения и времени t .

Приведенное в докладе уравнение колебаний опирается на классическую теорию Кирхгофа-Лява. Кратко напомним её основные гипотезы:

1) прямолинейный элемент, нормальный к срединной поверхности до деформации остается прямым и нормальным к срединной поверхности, не меняя своей длины;

2) нормальные напряжения между отдельными слоями пластины $\sigma_z = 0$

Для решения уравнения динамики удобно применять конечно-разностный метод, основанный на введении разностной сетки, дискретизации области пластины на отдельные участки и дальнейшее решение получившейся алгебраической системы уравнений.

Как известно, решение начально-краевых задач для волнового уравнения возможно с использованием явной, явно-неявной и неявных схем. Использование явной схемы позволяет, опираясь на известное решение задачи на предыдущих временных слоях сразу определять решение на текущем шаге по времени. Данный подход не требует какого-либо решения систем уравнений, но налагает жесткое ограничение на величину шага по времени, при нарушении данного условия наблюдается постепенное уменьшение достоверности получаемого решения (условие Куранта). Использование неявной схемы требует

на каждом из шагов решения получающейся системы уравнений, так как в дискретизированное уравнение входят и неизвестные, и искомые величины на текущем временном шаге. Явно-неявные схемы, сочетают в себе преимущества явного метода и гарантированную устойчивость неявной схемы. В докладе для решения задачи используется неявная схема, требующая на каждом шаге решения систем уравнений, однако обладающая доказанной гарантированной устойчивостью счета. На рисунке 2 приводятся иллюстрации, характеризующие прогиб пластинки в некоторые моменты времени.

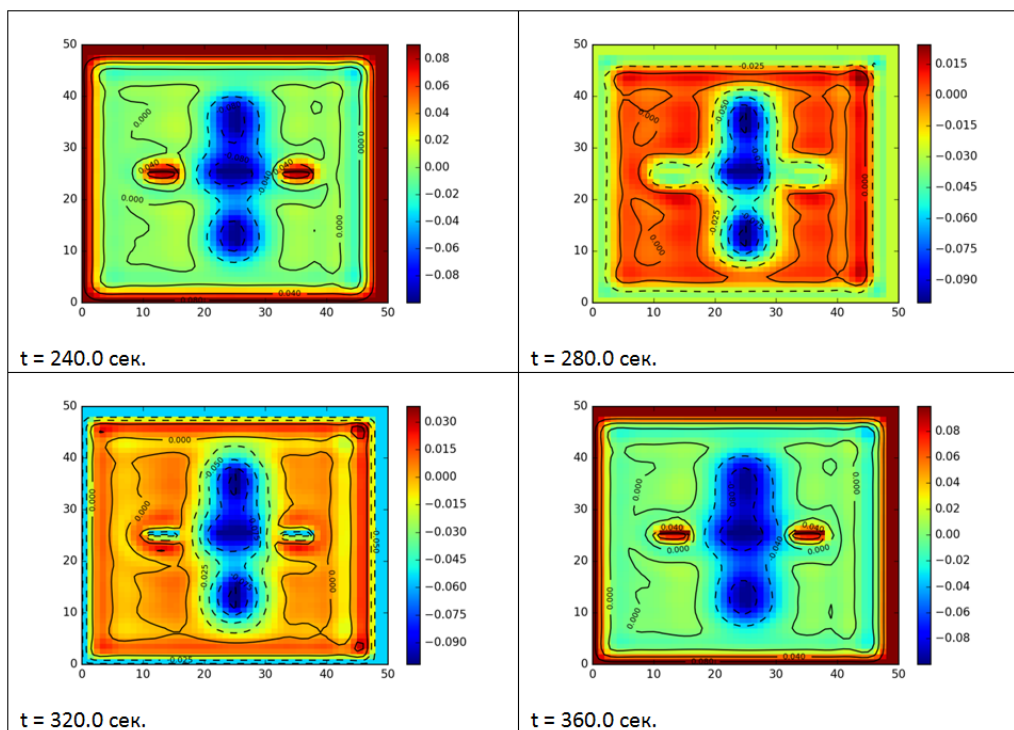


Рис. 2 – Изополя прогибов пластинки в различные моменты времени

В качестве заключения хотелось бы отметить, что разработанный Python-скрипт позволяет не только за приемлемое время получить само численное решение задачи, но и в динамическом режиме наблюдать за изменением численного решения на каждом шаге расчета, что достигается путем использования подключаемой библиотеки научной графики Matplotlib.

Список литературы

1. Лучано Рамальо Python К вершинам мастерства – М: Издательство ДМК, 2016. – 767 с.
2. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности – М: Мир, 1987. – 542 с.
3. Тьрътышников Е.Е. Методы численного анализа: учебное пособие для студ. вузов –М: Издательский центр "Академия 2007.-320 с (Университетский учебник. Сер. Прикладная математика и информатика)

Распространение колебаний в сооружениях, имеющих регулярно-периодическую структуру

Аннотация: В докладе рассматриваются вопросы распространения колебаний в сооружениях, имеющих регулярно-периодическую структуру

Рассмотрим трехмерную периодическую ортогональную расчетную модель. Полагаем, что элементы-связи между массами, параллельные различным осям координат, обладают различными жесткостными характеристиками, а элементы одного направления имеют различные жесткостные характеристики в зависимости от направления взаимного поступательного смещения масс.

Из всех возможных для связи какого-либо одного направления будем рассматривать только три, стоящие на главной диагонали матрицы жесткости и имеющие реальный физический смысл для расчетных моделей зданий. Остальные из возможных значений матрицы жесткости полагаем равными нулю, как не имеющие физического смысла.

Таким образом, величины $\gamma_{\alpha\beta}$ характеризуют жесткость связей, ось которых параллельна оси координат α при взаимном смещении соединяемых масс вдоль оси, параллельной оси координат β

Помимо поступательных перемещений масс возможны также их повороты вокруг осей, параллельных осям координат. Такие связи обозначены как $\gamma_{\alpha\beta}^*$.

Решая уравнение движения для α -составляющей смещения произвольной массы расчетной модели, получаем равенство, которое является дисперсионным соотношением для одной из трех ветвей спектра трехмерной расчетной модели, соответствующей составляющей поступательного движения масс вдоль оси X_1 .

Аналогично получаются дисперсионные соотношения для других ветвей спектра (при поступательном движении масс расчетной модели и повороте их вокруг осей).

Рассмотрим прямоугольную двумерную расчетную область. Для построения обратной решетки в прямой решетке определяется расстояние $\bar{a}_\alpha = |\bar{a}_\alpha|$ между параллельными рядами масс. Проведя отрезок длиной $|b_\alpha| = \frac{1}{\bar{a}_\alpha} = \frac{1}{|\bar{a}_\alpha|}$ в направлении, перпендикулярном соответствующим рядам, получаем вектор обратной решетки. Для рассматриваемой прямой решетки обратная решетка также будет прямоугольной. Для двумерной расчетной модели функция $\nu(\bar{c})$ (или $\omega(\bar{c})$) зависит от переменных c_1 и c_2 (компонент вектора \bar{c}) и на границе первой зоны ее нормальная производная должна обращаться в нуль. Используя дисперсионные соотношения для двумерных расчетных моделей, в плоскости $c_1 c_2$ можно построить семейство кривых, вдоль каждой из которых частота постоянна. Для таких линий равной частоты Б.П.Вольфсоном было введено название «изосихнотит». Все семейство кривых, характеризующее изменение частоты зависимости от \bar{c} называется картиной изосихнотит.

Из полученных результатов следует, что частота ω – величина существенно положительная и является периодической функцией координат c_α волнового вектора \bar{c} , симметричной относительно осей координат, имеющей абсолютный максимум в точках $c_1 = \pm 1/2$, $c_2 = \pm 1/2$ и стационарные седлообразные точки с координатами $c_1 = \pm 1/2$, $c_2 = 0$ и $c_1 = 0$, $c_2 = \pm 1/2$. Период функции в направлении обеих осей координат равен 1.

Существование особых точек указывает на то, что для любого направления распространения волны для дискретных периодических расчетных моделей существуют предельные

частоты: локальные предельные частоты для направления волновых векторов, совпадающих с осями Ox_1 и Ox_2 ; абсолютная предельная частота расчетной модели для направления волнового вектора, совпадающего с диагональю любого из квадрантов зоны. Если частота распространяющейся волны больше или равна $\omega^{x_1x_2}$, то независимо от направления распространения амплитуда этой волны при её движении в расчетной модели будет уменьшаться от массы к массе.

Пространственная дискретная расчетная модель здания или сооружения в общем случае может иметь 6 ветвей спектра собственных частот, соответствующих трем составляющим поступательного движения и трём возможным поворотам масс. Дисперсионное соотношение свидетельствует об определенных ограничениях, накладываемых различными факторами на возможность распространения в расчетной модели соответствующего вида волны (колебания). Эти ограничения, в основном, связаны с тем, что для любого направления волнового вектора волны, распространяющейся в здании, существует вполне определенная полоса пропускания, ограниченная предельными частотами. Колебания с частотами, не попадающими в полосу пропускания, практически в здании распространяться не могут. Таким образом, если к зданию (сооружению) приходит волна общего типа, способная вызвать все шесть возможных типов колебаний, то, в зависимости от характеристик падающей волны и конструкции здания, в последнем могут активно распространяться волны одних видов и практически не могут распространяться волны других видов.

В реальных зданиях и сооружениях одна и та же сейсмическая волна в стоящих рядом на поверхности земли и различных по конструктивному решению зданиях и сооружениях, может вызвать колебания совершенно различных видов (вертикальные, горизонтальные, крутильные). Одна и та же волна в одинаковых по конструктивному решению сооружениях, расположенных под разными углами к фронту волны, может либо вызвать активные колебания, либо не вызвать практически никаких колебаний. Аналогичные результаты очевидно должны иметь место при воздействии на здания и сооружения взрывной волны, ветра и т.п.

В зависимости от параметров волны и характеристик сооружения может оказаться, что волна от источника внутри сооружения преимущественно распространяется только в каких-либо избранных направлениях, лежащих внутри определенных телесных углов – для трехмерных расчетных моделей или определенных плоских углов – для двумерных расчетных моделей. В особых случаях волна может распространяться только в направлении некоторых лучей, исходящих из точки сооружения, в которой расположен источник. При этом в определенных направлениях преимущественно распространяется волны одного типа. Наряду с указанными особыми случаями возможно также, что волна распространяется по всем направлениям от источника без затухания, либо, наоборот, по всем направлениям активно затухает.

Список литературы

1. Бриллюэн Л., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах. - М., ИЛ, 1959
2. Вольфсон Б.П. О собственных колебаниях одномерной периодической системы. – Сб. Исследования по теории сооружений, под. ред. проф. Б.Г.Коренева, чл.-корр. АН СССР И.М.Рабиновича, проф. А.Ф.Смирнова, вып. ХУП, М., Стройиздат, 1969.
3. Вольфсон Б.П. Некоторые вопросы колебаний современных зданий и сооружений как двух- и трехмерных периодических систем. Сб. Исследования по теории сооружений, под. ред. проф. Б.Г.Коренева, чл.-корр. АН СССР И.М.Рабиновича, проф. А.Ф.Смирнова, вып. XIX, М., Стройиздат, 1972 г.
4. Дашевский М.А. Свободные поступательно-вращательные колебания несимметричных в плане сооружений регулярной структуры. – «Труды ЦНИИСК им. В.А.Кучеренко», вып. 43, 1975 г.

Экспериментальные и численные исследования ветровых нагрузок на конические крыши вертикальных цилиндрических резервуаров

Аннотация: В последние годы актуальными являются исследования по определению климатических воздействий на конструкции вертикальных цилиндрических стальных резервуаров. В нормативной документации отсутствуют рекомендации по назначению ветровых нагрузок на стационарные конические крыши РВС. Проведены комплексные модельные экспериментальные исследования по определению аэродинамических коэффициентов внешнего давления на поверхности конических и двухконических крыш РВС, а также измерена скорость потока вблизи крыши. Проведены численные исследования в пакете ANSYS CFX. Сравнение полученных результатов показало, что качественная картина, полученная экспериментально и численно, совпадает.

Для хранения нефти и нефтепродуктов на протяжении многих лет используют вертикальные цилиндрические стальные резервуары. Значительная часть резервуарного парка России эксплуатируется с 1970-х годов, и, в настоящее время, имеет высокий показатель морального и физического износа [7]. Новые резервуарные парки возводятся в северных районах и эксплуатируются в сложных природно-климатических условиях. В связи с этим актуальными являются исследования по изучению нагрузок и воздействий на основные конструкции резервуаров [1, 3, 6]. Отдельное внимание при этом уделяется стационарным крышам [2, 3].

В качестве стационарных крыш РВС используются конические и сферические каркасные и бескаркасные покрытия. При расчете крыш должны учитываться различные комбинации загрузжений, которые включают: постоянную нагрузку от конструкций резервуара, технологические нагрузки (вес оборудования, вакуумметрическое и избыточное давление), климатические воздействия (снеговые, ветровые, сейсмические).

В нормативной литературе достаточно подробно описаны климатические нагрузки на стационарные крыши сферической формы. При этом отсутствуют рекомендации по назначению ветровой нагрузки на конические покрытия.

Целью данной работы является определение ветровых нагрузок действующих на стационарные конические крыши РВС для хранения нефти и нефтепродуктов.

Проведены комплексные аэродинамические модельные экспериментальные исследования. Испытания проведены для резервуара диаметром 40 м, с высотой стенки 18 м. Объектом исследований являлись:

- коническая крыша высотой 7 м;
- три варианта, предложенной авторами впервые, двухконической крыши [4,5].

Геометрические параметры крыш показаны на рисунке 1.

Экспериментальные исследования проводились в аэродинамической трубе климатического типа с длинной рабочей частью. Испытывался отдельно стоящий резервуар в условиях типа местности А по классификации СП 20.13330. Измерения проводились на поверхности стенки и крыши резервуара.

На первом этапе измерялось давление и представлялось безразмерными коэффициентами, которые определялись отношением давления в точке измерения к давлению набегающего потока в контрольной точке:

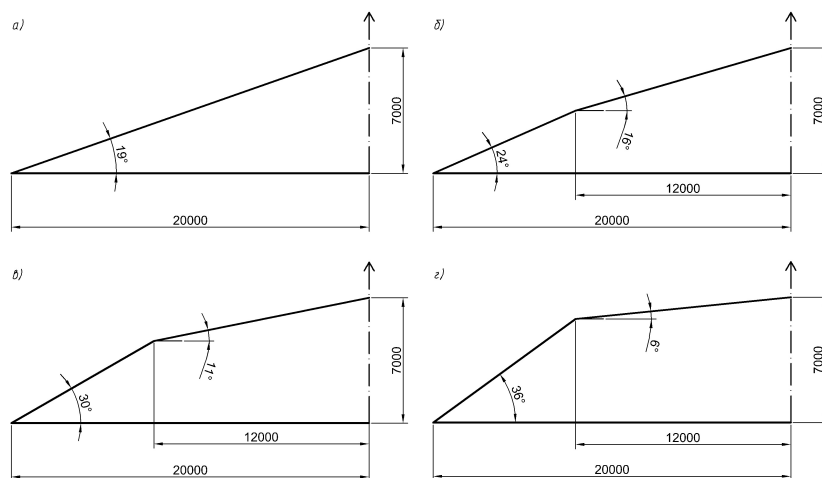


Рис. 1 – Геометрические параметры крыш:

а) коническая крыша; б) двухконическая V1.1; в) двухконическая V1.2; г) двухконическая V1.3

$$C_e = \frac{P - P_0}{q_{c.p.}} = \frac{(P - P_0)}{\frac{\rho U_{c.p.}^2}{2}} \quad (1)$$

На втором этапе методом термоанемометрии измерялась скорость ветрового потока вблизи поверхности крыши для тех же точек, что и давление. Результаты измерений представлялись безразмерными коэффициентами, которые вычислялись как отношение скорости в точке измерения к скорости в контрольной точке.

На рисунке 2 приведены некоторые результаты измерений.

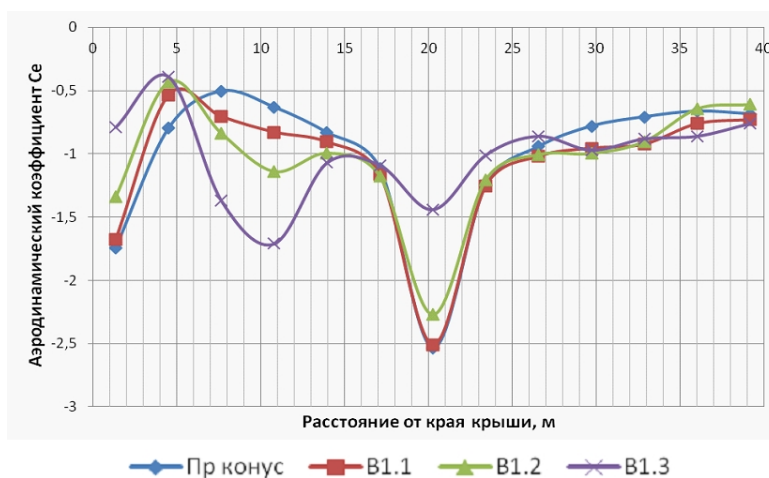


Рис. 2 – Изменение аэродинамического коэффициента в вертикальном сечении, проходящем через центр крыши в направлении ветрового потока

Полученные результаты показали, что все крыши испытывают отрицательное давление. Для двухконических крыш характерно снижение аэродинамического коэффициента на наветренной стороне в зоне излома; на конической крыше наблюдается повышение скорости потока на наветренной стороне и снижение на подветренной; для двухконических крыш характерно наличие отрицательного градиента скорости на наветренной стороне в зоне излома крыши.

На следующем этапе исследований выполнено численное моделирование ветровых воздействий на крыши с использованием пакета ANSYS CFX (рисунок 3). Моделировались

отдельно стоящие резервуары с различными формами крыши. Рассмотрены различные варианты расчетной сетки, а также различные модели турбулентности.

Выбраны рациональные параметры расчетной области. Сравнение результатов экспериментальных и численных исследований показало, что картина распределения давления по поверхности крыш, а также коэффициенты скорости потока вблизи покрытий качественно совпадают.

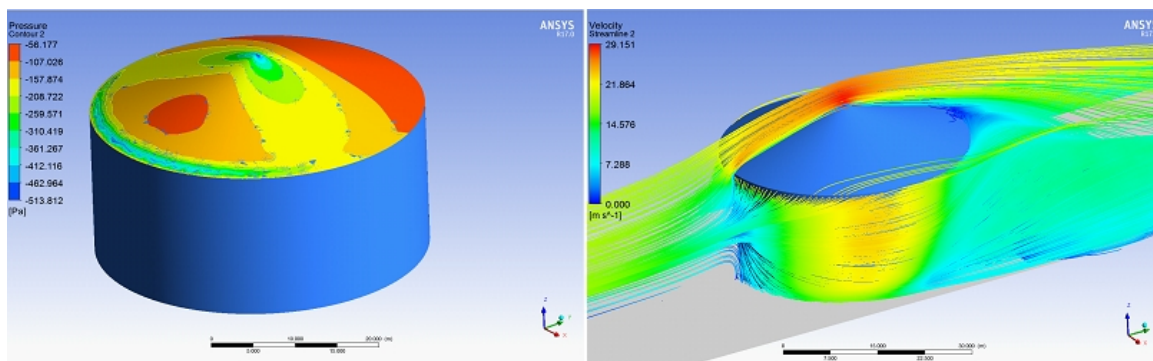


Рис. 3 – Результаты численных экспериментов: распределение давления по поверхности конической крыши (слева); распределение скорости потока (справа)

Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего анализа ветровых нагрузок на стационарные конические крыши РВС для хранения нефти и нефтепродуктов, в том числе, с учетом взаимного влияния резервуаров при их групповом расположении, а также с учетом влияния расположенного на крыше оборудования и конструкций (лестниц, мостиков и т.д.), с дальнейшей разработкой рекомендаций по назначению нагрузок.

Данные по ветровым нагрузкам также необходимы для изучения процесса переноса снеговых масс по крышам под действием ветра. Это позволит совершенствовать конструктивные решения стационарных крыш РВС для снижения негативного влияния ветровых и снеговых нагрузок на их напряженно-деформированное состояние.

Список литературы

1. Васильев Г.Г., Лежнев М.А., Леонович И.А., Сальников А.П. Напряженно-деформированное состояние резервуаров, находящихся в эксплуатации // Трубопроводный транспорт: теория и практика. 2015. № 6 (52). С. 41–44.
2. Востров В.К. Совершенствование и развитие российской и межгосударственной нормативной технической базы в резервуаростроении с учетом еврокодов и американских стандартов // Монтажные и специальные работы в строительстве. 2013. – № 1. – С 2–9.
3. Ильин Е.Г., Иванцова С.Г., Катанов А.А., Задумин А.Н. Нагрузки и методы расчета стационарных крыш вертикальных цилиндрических резервуаров // Наука и технологии трубопроводного транспорта нефти и нефтепродуктов. 2015. № 1 (17). С. 36–43.
4. Семенов, А.А. Поиск оптимальных геометрических параметров двухконических крыш вертикальных цилиндрических резервуаров при симметричной нагрузке. Ч. I / А.А. Семенов, М.Г. Каравайченко, И.А. Порываев // Нефтегазовое дело. – 2016. Том 14. №3. С. 100–105.
5. Семенов, А.А. Поиск оптимальных геометрических параметров двухконических крыш вертикальных цилиндрических резервуаров с учетом верхнего кольца и несимметричной нагрузки. Ч. II / А.А. Семенов, М.Г. Каравайченко, И.А. Порываев // Нефтегазовое дело. – 2016. Том 14. №3. С. 106–111.
6. Тарасенко А.А., Чепур П.В., Чирков С.В. Численное моделирование процесса деформирования резервуара при развитии неравномерных осадок // Нефтяное хозяйство. 2015. № 4. С. 88–91
7. Ханухов Х.М. Развитие системы обеспечения циклической прочности и промышленной безопасности строительных сварных металлоконструкций: автореф. дис. ... д-ра техн. наук. – М.: УГТУ-УПИ, 2011. – 68 с.

Коэффициенты динамичности для расчёта поврежденной фермы

Аннотация: В статье рассмотрены вопросы живучести ферм покрытий. Целью расчетов живучести является обеспечение несущей способности ферм при повреждении отдельных ее элементов. Выполнены теоретические и численные расчеты коэффициентов динамичности на примере двухпролетной неразрезной балки и плоской фермы. Для фермы рассмотрено несколько вариантов повреждения элементов и времени выключения их из работы. Для каждого из вариантов вычислены значения коэффициентов динамичности. Проведен анализ полученных результатов для теоретических и численных вычислений. Даны рекомендации для практического применения коэффициента динамичности при расчетах ферм.

В статье рассмотрены вопросы живучести ферм покрытий. Целью расчетов живучести является обеспечение несущей способности ферм при повреждении отдельных ее элементов. Выполнение расчетов на живучесть позволяет исключить прогрессирующее обрушение покрытий и нанесение вреда здоровью и жизни людей [21, 1]. В ряде работ [5, 1, 12, 11, 6, 2, 13, 20, 17, 23, 15, 19, 24, 14, 18, 16] исследовалось поведение повреждённых конструкций. При задании расчетной модели моделируется либо статическое, либо динамическое нагружение в зависимости от характера повреждения фермы: коррозия, пожар, внезапный отказ элемента. Однако, на практике допускается выполнять динамические расчеты в статической постановке при умножении всех результатов на соответствующий коэффициент динамичности.

На примере двухпролетной неразрезной балки [16, 25], нагруженной в середине каждого из пролетов сосредоточенной силой P , выполнены теоретические вычисления коэффициента динамичности. Расчеты основаны на рассмотрении двух вариантов конструкций балки: неповрежденной и поврежденной (отсутствует средняя опора). В неповрежденной конструкции определяются опорные реакции и статические прогибы под каждой из сосредоточенных сил. В поврежденной схеме также вычисляется величина статического прогиба под каждой из сосредоточенных сил. Далее рассматривается энергетический баланс системы и определяется уравнение динамического прогиба. Отношение динамического прогиба к статическому составляет величину коэффициента динамичности. Приведенные теоретические вычисления были подтверждены численным исследованием. Расчеты выполнялись в комплексе Femap Nastran, расхождение с теоретическими вычислениями составило 4.2%.

Теоретические вычисления коэффициента динамичности конструкции фермы проводились по аналогии с выполненными расчетами для двухпролетной балки. Ферма была представлена в виде условной балки. После математических преобразований была получена зависимость изменения момента инерции фермы от воспринимаемой доли нагрузки. Анализ полученных выражений позволяет сделать вывод, что чем меньше при повреждении меняется момент инерции, тем меньше доля нагрузки, воспринимаемая «поврежденной частью» фермы, а значит, тем меньше коэффициент динамичности. При выполнении численного расчета были рассмотрены несколько вариантов повреждения конструкции фермы: выход из строя элемента нижнего пояса, выключение из работы опорного раскоса, выход из строя среднего раскоса. Численные исследования ферм выполнялись в статической и динамической постановках [7, 4, 8, 9, 10, 21]. При расчёте повреждённых ферм удаляемый элемент заменялся действующими в нём усилиями, которые определялись статическим расчётом неповрежденной конструкции. Динамическое поведение фермы исследовано для промежутков времени 0.01 с, 0.05 с, 0.1 с, 0.4 с, за которые уменьшаются усилия в удаляемом стержне. На основании динамического и статического расчетов

поврежденной конструкции были определены максимальные перемещения и усилия в ферме. В дальнейшем полученные результаты расчетов сравнивались между собой с целью вычисления величины коэффициента динамичности.

В элементах фермы определены прогибы и усилия для каждого варианта повреждения конструкции. Для каждого промежутка времени выхода элемента фермы из строя, составлены графики зависимости прогибов от времени. Коэффициенты динамичности вычислены как отношения максимальных усилий и перемещений, которые возникают в поврежденной конструкции при выполнении динамического расчета, к соответствующим усилиям, возникающим в поврежденной конструкции при статическом расчете. При выходе из строя элемента нижнего пояса фермы численные исследования показали, что чем меньше время выключения элемента из работы, тем больше коэффициент динамичности. Максимальное значение коэффициента динамичности для рассматриваемой расчетной ситуации составляет 2.091. Далее было проведено сравнение значений коэффициентов динамичности, полученных теоретическим и численным методами, для всех рассмотренных расчетных ситуаций. Теоретические значения для всех исследованных параметров выше численных в среднем на 10–17%. С учётом этого, для практического использования, при повреждении поясов рекомендуется принимать значение коэффициента динамичности равным 2. При остальных вариантах повреждений для вычисления коэффициента динамичности использовать формулу (1), полученную в ходе теоретического расчета:

$$k_d = 1 + \frac{\Delta q}{q} = 1 + \frac{(w_o - w)}{w_o} \quad (1)$$

В представленной работе теоретически обоснованы коэффициенты динамичности при различных вариантах повреждения конструкции фермы. Численные исследования показали, что значение коэффициента динамичности растет обратно пропорционально времени выхода элемента из строя. С целью совершенствования методики расчёта повреждённых ферм и уточнения коэффициентов динамичности рекомендуется продолжить исследования в данной области.

Список литературы

1. Беляев Н.М. Сопrotивление материалов. М., 1965. 856 с.
2. Белостоцкий А.М. и др. Расчеты зданий на устойчивость против прогрессирующего обрушения с учетом физической и геометрической нелинейностей. – Теория и практика расчета зданий, сооружений и элементов конструкций. Аналитические и численные методы: Сб. трудов международной научно-практической конференции, М.: МГСУ, 2008, с. 183–193.
3. Данилов А.И. Концепция управления процессом разрушения строительного объекта // Промышленное и гражданское строительство. – 2014. – № 8. – С.74–77.
4. Дробот Д.Ю. Оценка живучести Крытого Конькобежного центра в Крылатском // Вестник МГСУ. – 2009. – № 2. – С. 116 – 119. Kirk A. Marchand, Farid Alfawakhive. Blast and Progressive Collapse. – AISC, 2005.
5. Еремеев П.Г. Предотвращение лавинообразного (прогрессирующего) обрушения несущих конструкций уникальных большепролетных сооружений при аварийных воздействиях. – Строительная механика и расчет сооружений, №2, 2006, с. 65–72.
6. С.А.Зенин, Р.Ш.Шарипов, О.В.Кудинов, Г.И.Шапиро, А.А.Гасанов. Расчёты крупнопанельных зданий на устойчивость против прогрессирующего обрушения методами предельного равновесия и конечного элемента // Строительные науки. – 2016. – №4. – с.109–113.
7. Кудишин Ю., Дробот Д. Живучесть конструкций в аварийных ситуациях. – Металлические здания, №4[8], 2008, с. 20–22, №5[9], 2008, с. 21–23.
8. Кудишин Ю.И. Концептуальные проблемы живучести строительных конструкций // Вестник МГСУ. – 2009. – № 2 (спец.). – С. 28 – 36.

9. Кудишин Ю.И., Дробот Д.Ю. К вопросу о живучести строительных конструкций // Строительная механика и расчет сооружений. – 2008. – №2 (217). – С. 36 – 43.
10. Кудишин Ю.И., Дробот Д.Ю. Живучесть строительных конструкций –важный фактор снижения потерь в условиях аварийных ситуаций //Металлические конструкции. – Макеевка: ДонНАСА. – 2009. – № 1. – С.61 – 72.
11. Назаров Ю.П., Городецкий А.С., Симбиркин В.Н. К проблеме обеспечения живучести строительных конструкций при аварийных воздействиях// Строительная механика и расчет сооружений. – 2009. – №4. – С. 5–9.
12. Ю.М. Стругацкий. Обеспечение прочности панельных зданий при локальных разрушениях их несущих конструкций. Сб.: Исследования несущих бетонных и железобетонных конструкций сборных многоэтажных зданий. – М.: МНИИТЭП, 1980, с. 3–19.
13. Ю.М. Стругацкий, Г.И. Шапиро. Безопасность московских жилых зданий массовых серий при чрезвычайных ситуациях. – Промышленное и гражданское строительство, №8, 1998, с. 37–41.
14. Astaneh-Asl A. Progressive Collapse of steel truss bridges, the case of I-35W collapse/ Proceedings, 7th International Conference on Steel Bridges, Guimaraes, Portugal, June 4–6, 2008, pp.1–10.
15. Ellingwood, B.R., Smilowitz, R., Dusenberry, D.O., Duthinh, D., Lew, H.S., and Carino, N.J. (2007), Best Practices for Reducing the Potential for Progressive Collapse in Buildings, National Institute of Standards and Technology, NISTIR 7396, USA.
16. Griengsak Kaewkulchai, Eric B. Williamson. Beam element formulation and solution procedure for dynamic progressive collapse analysis. Computers & Structures.vol.82, issues 7–8, varch 2004, pp. 639–651
17. Canisius T.D. Robustness of structural systems – a new focus for the joint committee on structural safety (JCSS) // Applications of statistics and probability in civil engineering, London. – 2007. – 8 p.
18. Hang Yu, Bassam A.Izzuddin, and Xiao-Xiong Zha. Progressive collapse of steel-framed buildings: influence of modelling approach. Advanced Steel Construction Vol. 6, No. 4, pp. 932–948 (2010).
19. Kamel Sayed Kandil, Ehab Abd El Fattah Ellobody, Hanady Eldehemy. Progressive Collapse of Steel Frames. World Journal of Engineering and Technology, 2013, 1, 39–48.
20. Kirk A. Marchand, David J. Stevens. Progressive Collapse Criteria and Design Approaches Improvement. Journal of Performance of Constructed Facilities 29(5):B4015004 • June 2015.
21. D. A. Nethercot. Design of Building Structures to Improve their Resistance to Progressive Collaps. The Twelfth East Asia-Pacific Conference on Structural Engineering and Construction. Procedia Engineering 14 (2011) 1–13.
22. Report of the Inquiry into the Collapse of Flats at Ronan Point, Caning Town. – MSO, 1968 (ЦИНИС, перевод 18736). R.A.K. Sanches, H.B. Coda. Flexible multibody dynamics finite element formulation applied to structural progressive collapse analysis. Latin American Journal of Solids and Structures 14 (2017) pp.52–7
23. P.M. Stylianidis,, D.A. Nethercot, B.A. Izzuddin, A.Y. Elghazouli. Robustness assessment of frame structures using simplified beam and grillage models. Engineering Structures, Volume 115, 15 May 2016, pp. 78–95.
24. P.M. Stylianidis,, D.A. Nethercot. Modelling of connection behaviour for progressive collapse analysis. Journal of Constructional Steel Research. Vol. 113, October 2015, Pages 169–184.
25. P.M.Styliandis, D.A.Nethercot, B.A.Izzuddin, A.Y.Elghazouli. Modelling of beam response for progressive collapse analysis. Structures Vol.3, August 2015, pp.137–152.
26. F. B. Xavier , L. Macorini , and B. A. Izzuddin. Contribution of masonry cladding for robustness enhancement of multi-storey buildings under sudden column loss. Proceedings of the 16th International Brick and Block Masonry Conference, Padova, Italy, 26–30 June 2016.

Определение частоты основного тона колебаний двухслонной составной балки с ненулевой толщиной шва

Аннотация: В докладе рассматриваются составные балки по теории Ржаницына А.Р.[1] и определяются их частоты основного тона колебаний

Дифференциальное уравнение свободных колебаний составной балки, составленной из двух одинаковых ветвей, запишем по [2].

$$y^{IV} - \lambda^2 y^{IV} - \frac{\mu\omega^2}{2EI} y'' + \frac{\mu\omega^2 \lambda^2}{2EI} \left(1 - \frac{c^2}{\gamma 2EI}\right) y = 0, \quad (1)$$

где y – прогиб; μ – погонная масса составного стержня;

ω – частота собственных колебаний;

EI – изгибная жёсткость отдельной ветви;

c – расстояние между центрами тяжести ветвей;

$\lambda = \sqrt{\xi\gamma}$,

где ξ – коэффициент жёсткости шва на сдвиг, определяется по [1];

$\gamma = \frac{2}{EF} + \frac{c^2}{2EI}$;

F – площадь поперечного сечения отдельного стержня (ветви).

Запишем уравнение (1) в безразмерном виде:

$$w^{VI} - \bar{\eta} w^{IV} - \bar{\rho} w^{II} + \bar{\rho} \bar{\eta} z w = 0 \quad (2)$$

Здесь: $w^{VI} = \frac{d^6 w}{d\varphi^6}$; $w^{IV} = \frac{d^4 w}{d\varphi^4}$; $w^{II} = \frac{d^2 w}{d\varphi^2}$; $w = \frac{y}{l}$; $\varphi = \frac{x}{l}$; $\bar{\eta} = \lambda^2 l^2$; $\bar{\rho} = \frac{\mu\omega^2}{2EI} l^4$; $z = \left(1 - \frac{c^2}{\gamma 2EI}\right)$.

l – пролёт балки.

Дифференциальное уравнение (2) можно представить как систему трёх дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\bar{\omega}'' = - [\bar{\rho} \bar{\eta} z w - \bar{\rho} \phi - \bar{\eta} \bar{\omega}] \quad (3)$$

$$\varphi'' = \bar{\omega} \quad (4)$$

$$w'' = \varphi \quad (5)$$

Решение системы дифференциальных уравнений (3), (4) и (5) получим с привлечением разностных уравнений МПА [3] и с учётом краевых условий. Приведём ниже разностную аппроксимацию (3) при отсутствии всех видов разрывов:

$$\begin{aligned} (12 - \tau^2 \bar{\eta}) \bar{\omega}_{j-1} - (24 + 10\tau^2 \bar{\eta}) \bar{\omega}_j + (12 - \tau^2 \bar{\eta}) \bar{\omega}_{j+1} = \\ = \tau^2 \bar{\rho} \bar{\eta} z (w_{j-1} + 10w_j + w_{j+1}) - (\varphi_{j-1} + 10\phi_j + \varphi_{j+1}) \end{aligned} \quad (6)$$

Аппроксимация уравнений (4) и (5) может быть выполнена по аналогии. В качестве примера рассмотрим безраскосную ферму или балку Виренделя (показана на рисунке 1).

Примем одинаковое поперечное сечение поясов и стоек – прямоугольное с размерами 1x10 см, тогда площадь поперечного сечения $F = 10^{-3} \text{см}^2$, момент инерции $I = 8,3 \cdot 10^{-7} \text{см}^4$. Материал – сталь, $E = 2,1 \cdot 10^8 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}$. Погонная масса балки с учётом поясов и стоек $\mu = 18,05$. Шаг стоек $B = 1$. В методических целях покажем здесь

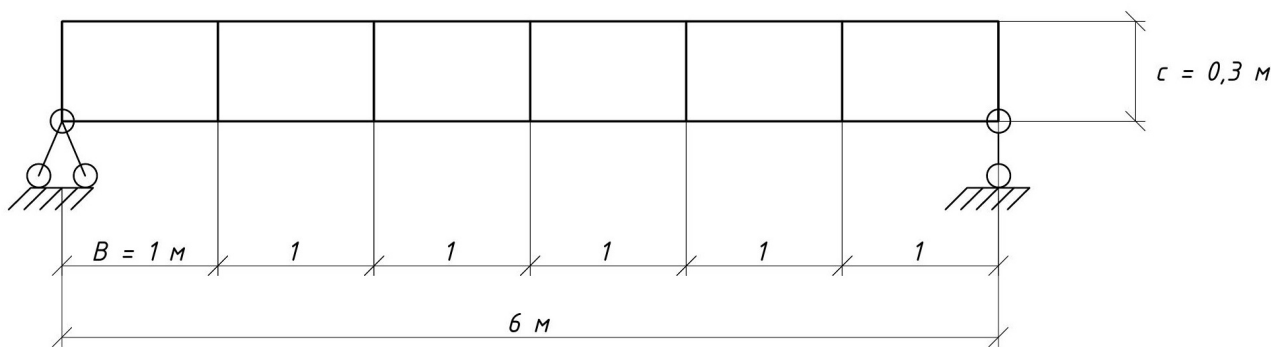


Рис. 1 – Безраскосная ферма

ход решения на минимальной расчётной сетке при $\tau = \frac{1}{2}$. По [2] при шарнирном опирании краевые условия будут следующими: $w = \varphi = \bar{\omega} = 0$. Запишем разностные уравнения для единственной регулярной точки:

$$-2w_1 = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot 10\varphi_1;$$

$$-2\varphi_1 = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot 10\bar{\omega}_1;$$

$$-2\bar{\omega}_1 = -\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2^2} [\bar{\rho} \cdot 280 \cdot 0,035714 \cdot 10w_1 - \bar{\rho} \cdot 10\varphi_1 - 280 \cdot \bar{\omega}_1].$$

Из решения системы уравнений получим $\bar{\rho} = 1361,711$. Используя соотношение $\omega^2 = \frac{2EI}{\mu l^4} \bar{\rho}$, получим значение круговой частоты $\omega = 142,7$. Этот результат может быть уточнён при сгущении сетки. Аналитическое решение по [1] (формула 62.7 стр. 215) $\omega = 145,8$. При моделировании описанной выше балки в программном комплексе STARK ES с использованием 19 стержневых конечных элементов получен результат $\omega = 163$.

Список литературы

1. Ржаницын А.Р. Составные стержни и пластинки. – М.: Стройиздат, 1986. – 316 с.
2. Габбасов Р.Ф., Филатов В.В. Численный метод расчёта составных стержней и пластин с абсолютно жёсткими поперечными связями: Монография. – М.: Издательство АСВ, 2014. – 200 с.
3. Габбасов Р.Ф., Габбасов А.Р., Филатов В.В. Численное построение разрывных решений задач строительной механики. Учебное пособие. – М.: Издательство АСВ, 2008. – 280 с.